Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 31. Okt., WS 2005/06
Abgabe: 07. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen – Rechnen mit Beträgen

a) Beweisen Sie die folgende Ungleichung für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

b) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem alle Punkte, deren Koordinaten (x, y) der folgenden Ungleichung genügen:

$$\big|2x - |x+y-2|\big| < 2$$

Aufgabe 2: Potenzsummen per Induktion

Die Beweismethode der Vollständigen Induktion ist ein mächtiges Instrument, wenn es darum geht, Aussagen zu beweisen, die durch natürliche Zahlen $n \in \{n_{\min}, n_{\min}+1, ..., n_{\max}-1, n_{\max}\} \subset \mathbb{N}$ parametrisiert sind. Beachte, daß $n_{\max}$ nicht existieren muß (Fortsetzung *ad infinitum*); ebenso kann ein Induktionsbeweis je nach Kontext auch "absteigend" verlaufen, d.h. man startet bei einem $n_{\max}$ und "hangelt" sich dann runter statt rauf. Das Prinzip der vollständigen Induktion läßt sich schön an einer Reihe aufgestellter Dominosteine veranschaulichen. Ist man in der Lage, den ersten Stein der Dominokette umzuwerfen (Induktionsanfang), so werden alle Steine umfallen, falls sichergestellt ist, daß jeder Stein seinen Nachfolger mitreißt.

Leider ist die Vollständige Induktion *nicht* dazu nütze, ein mathematisches Ergebnis zu finden; dazu bedarf es anderer Ideen. Ist man aber bei einer sinnvollen Vermutung angelangt, so verläuft der Beweis per Induktion oftmals mechanisch (leider auch nicht immer!). Diesen Effekt können Sie am eigenen Leib erleben, wenn Sie den Aufgabenteil b) ohne zu schummeln bearbeiten. Daß man nebenbei mit "kreativer", vermeintlicher Induktion auch einigen verblüffenden Unfug anstellen kann, erfahren Sie umseitig (ganz unten).

a) Beweisen Sie die folgenden Summenformeln für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{i)} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

b) Versuchen Sie, eine analoge Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^3$ herzuleiten und anschließend durch Vollständige Induktion zu verifizieren.

Anleitung: Betrachten Sie die Summenformeln $\big($ganz rechts unter i) bzw. ii)$\big)$ als Funktionen in n. Wie nennt man solche Funktionen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Exponenten von k und dem größten Exponenten von n, welcher auf der jeweiligen rechten Seite auftritt? Überlegen Sie sich einen Ansatz für die gesuchte Summenformel. Stellen Sie sodann ein Gleichungssystem auf, das es Ihnen ermöglicht, die unbekannten Koeffizienten in dem Ansatz zu bestimmen, und lösen Sie dieses. Falls Ihre Schulkenntnisse nicht ausreichen, um das betreffende Gleichungssystem zu lösen, dürfen Sie die gesuchte Formel nachschlagen (siehe z.B. Bronstein, diverse Analysis Lehrbücher) und die Koeffizienten ablesen. Zeigen Sie in diesem Fall, daß die abgelesenen Koeffizienten tatsächlich eine Lösung des von Ihnen aufgestellten Gleichungssystems sind.

c) Beschreiben Sie kurz die Vorgehensweise, um sich die Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} k^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest) zu beschaffen. Erstaunt es Sie, daß die Vorgehensweise immer zum Ziel führt? Was könnte schiefgehen? (Bitte um kurze Stellungnahme; eine Vertiefung dieser Frage ist für eine spätere Aufgabe geplant.)

Aufgabe 3: Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Das *arithmetische, geometrische* und *harmonische* Mittel für zwei reelle Zahlen $a, b > 0$ ist definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}\ .$$

a) Weisen Sie die folgende Ungleichung nach (in welchem Fall tritt Gleichheit ein?):

$$A(a,b)^2 \geq G(a,b)^2 \geq H(a,b)^2.$$

b) Beweisen Sie (induktiv) die obige Ungleichung für eine beliebige Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von positiven rellen Zahlen $a_1, ..., a_n$:

$$\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)^n \ \geq\ a_1 \cdot ... \cdot a_n \ \geq\ \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}\right)^n\ .$$

Tip: Beachten Sie Aufgabe 3c) auf dem Übungsblatt 1.

Bemerkung: Beachte, daß die obige Ungleichung normalerweise unter Verwendung der n'ten Wurzel notiert wird, die hier aber noch nicht benutzt werden soll. Ferner werden wir auf diese Ungleichung noch einmal im Zusammenhang mit konvexen bzw. konkaven Funktionen zurückkommen.

Literaturaufgabe: Binomialkoeffizienten und Binomischer Lehrsatz

Unter einem Binom versteht man einen Ausdruck der Gestalt $(a+b)^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2$ wissen Sie bereits: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Wie sieht die *expandierte* (ausmultiplizierte) Form im allgemeinen Fall aus.

a) Klären Sie unter *Zuhilfenahme eines geeigneten Lehrbuchs* die Definition und Bedeutung der *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$. Was haben die Binomialkoeffizienten mit dem *Pascalschen Dreieck* zu tun?

b) Schlagen Sie ebenfalls die Aussage des Binomischen Lehrsatzes nach. Versuchen Sie diesen *induktiv* zu beweisen unter Ausnutzung geeigneter Eigenschaften der Binomialkoeffizienten.

Warnung: Etliche Lehrbücher beweisen den Binomischen Lehrsatz vermöge kombinatorischer Argumente. Schreiben Sie daher den Beweis nicht blind ab !

Zum Schmunzeln:

Kommentieren Sie den Beweis von folgendem **Satz:** Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)
Induktionsanfang $(n = 1)$: Es ist offensichtlich, daß in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.
Induktionsschritt $\big(n \geq 1,\ A(n) \Rightarrow A(n+1)\big)$: Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n+1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.

Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Pferde dieselbe Farbe haben. $\square$