Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 21. Nov., WS 2005/06
Abgabe: 28. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: Untersuchung einiger Nullfolgen

Für $n \in \mathbb{N}$ sei das n'te Folgenglied a_n der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch einen der folgenden Ausdrücke gegeben. Zeigen Sie, daß es sich in allen Fällen um Nullfolgen handelt. Argumentieren Sie zunächst mit den Grenzwertsätzen (siehe 2. Merkblatt). Kann man zu jeder Folge eine Konstante $C > 0$ finden, so daß die Abschätzung $|a_n| \leq C/n$ gilt?

a) $\dfrac{n}{n^3+n^2+1}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{n}}{n^3}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{n^4}}{n+4}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{2n^2-1}}$ e) $(1+\frac{1}{n})^{10}-1$ f) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Noch ein paar Fragen zum Weiterdenken: Welchen Sinn macht die Abschätzung im Hinblick auf die ϵ-Definition des Grenzwerts? Welche Folge konvergiert am "schnellsten" gegen Null, welche am "langsamsten"? Wie würden Sie den Begriff *Konvergenzgeschwindigkeit* definieren bzw. wie ließe sich dieser Begriff quantifizieren? (Bitte erst selbst denken, bevor Sie das Kleingedruckte der nächsten Aufgabe lesen !)

Aufgabe 2: Äquivalente Folgen und Konvergenzrate

Zwei Folgen $(a_n), (b_n)$ heißen *äquivalent*, falls Konstanten $k, K > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ derart existieren, daß für alle $n > N$ die Ungleichung $k|a_n| \leq |b_n| \leq K|a_n|$ gilt. In Symbolen:

$$(a_n) \sim (b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, k, K > 0,\ N \in \mathbb{N} : \forall \mathbb{N} \ni n > N : \quad k|a_n| \leq |b_n| \leq K|a_n| \,.$$

Im Aufgabenteil a) sollen Sie zeigen, daß es sich bei der obigen Definition um eine sogenannte *Äquivalenzrelation* auf der Menge aller Folgen handelt. Wenn Sie neugierig sind, was man darunter versteht, greifen Sie zu Ihrem Lieblings-Analysis Buch, das Sie vorlesungsbegleitend benutzen. Dies ist aber nicht notwendig, um Teil a) zu lösen.
Nun noch eine weitere Definition: Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Falls die Nullfolge $(a_n - a)$ äquivalent zur Nullfolge $n^{-\alpha}$ ist, wobei $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so bezeichnet man α als die *Konvergenzodnung* oder *Konvergenzrate.* Man sagt auch $a_n - a$ konvergiert (so schnell) wie $n^{-\alpha}$ gegen 0. Falls (nur) eine Abschätzung nach oben besteht, z.B. $|a_n - a| < Cn^{-\alpha}$, nennt man α eine *untere Schranke für die Konvergenzordnung.* $|a_n - a|$ konvergiert dann "mindestens so schnell" gegen 0 wie $n^{-\alpha}$. Entsprechend definiert man *obere Schranken für die Konvergenzordnung.*
Oftmals ist es sehr mühsam, beide Abschätzungen durchzuführen; dagegen ist bei vielen Anwendungen vor allem eine möglichst große untere Schranke der Konvergenzrate von Interesse. Zum Beispiel möchte man abschätzen können, wie lange eine Computersimulation dauert, um ein Problem (z.B. Wettervorhersage) mit einer vorgegebenen Genauigkeit approximativ zu lösen. Dazu benötigt man, ähnlich wie bei den Folgen, Konvergenzabschätzungen des Verfahrens, das zur näherungsweisen Lösung des Problems eingesetzt werden soll. Gibt es Anhaltspunkte, daß die gefundene untere Schranke optimal ist, so wird sie häufig salopp als Konvergenzrate bezeichnet, ohne den strengen Nachweis dafür zu erbringen.
Sie haben nun eine Antwort auf die letzte Frage in Aufgabe 1 erhalten. Offenbar benutzt man triviale Nullfolgen wie $n^{-\alpha}$ als Vergleichsfolgen, um die Konvergenzgeschwindigkeit zu quantifizieren. Es stellt sich jedoch heraus, daß nicht allen Folgen eine Konvergenzrate α im strengen Sinne zugeordnet werden kann, weil die Äquivalenzklassen $[n^{-\alpha}] := \{(a_n)|(a_n) \sim (n^{-\alpha})\}$ nicht alle möglichen Folgen erfassen.

a) Beweisen Sie folgende Aussagen:
   i) Reflexivität : $(a_n) \sim (a_n)$
   ii) Symmetrie : $(a_n) \sim (b_n) \quad \Leftrightarrow \quad (b_n) \sim (a_n)$
   iii) Transitivität: $(a_n) \sim (b_n) \ \wedge\ (b_n) \sim (c_n) \quad \Rightarrow \quad (a_n) \sim (c_n)$

b) Versuchen Sie die Konvergenzraten für die in Aufgabe 1) definierten Folgen durch Nachweis der erforderlichen Abschätzungen zu bestimmen.

c) Zeichnen Sie einmal die Folgenglieder $n^{-1/2}, n^{-1}$ und n^{-2} für ein paar kleine natürliche Zahlen, um ein Gefühl für die unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeiten zu bekommen.

Aufgabe 3: Grenzwertberechnung und Abschätzung der Konvergenzrate

Man berechne die folgenden Grenzwerte und bestimme möglichst große untere Schranken für die Konvergenzraten.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+2+...+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right]$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + ... + \dfrac{1}{(2n)^2}\right]$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n}\right]$

Klassische Approximationen des Altertums, Teil 2

Unter Verwendung des Abstandsbegriffs läßt sich ein Kreis (genauer die Kreislinie) leicht definieren: man versteht darunter die Menge aller Punkte, welche von einem gegebenen, festen Punkt (Mittelpunkt) gleichen, konstanten Abstand (Radius) besitzen. Ebenso einfach läßt sich auch die (abgeschlossene) Kreisfläche als die Menge aller Punkte charakterisieren, deren Abstand zum Mittelpunkt kleiner oder gleich dem Radius ist. Fragt man dagegen nach der Länge einer Kreislinie (Umfang) bzw. nach der eingeschlossenen Fläche, so fällt die Antwort deutlich schwieriger aus. Einfache Messungen zeigen bereits, daß der Umfang eines Kreises kein ganzzahliges Vielfaches seines Durchmessers (doppelter Radius) ist, wie dies beispielsweise beim Quadrat ($U = 4d$) oder beim regelmäßigen Sechseck ($U = 3d$) der Fall ist. Darüberhinaus gelingt es weder das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser, welches heute mit π bezeichnet[a] wird, mittels rationaler Zahlen noch mit Wurzeln (ähnlich der Diagonale eines Qudrates) genau anzugeben. Zwar waren recht grobe Näherungswerte für π durch Messungen sicherlich den Babyloniern und Ägypetern bekannt, doch ist es das Verdienst des *Archimedes von Syrakus*, als erster ein Verfahren angegeben zu haben, das unter Inkaufnahme eines anwachsenden Rechenaufwands die Bestimmung von π mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht (im Gegensatz zu Messungen, die selbst wenn man eine perfekte Kreislinie erzeugen könnte, eine gewisse Fehlertoleranz nicht unterschreiten.) Die Idee seines Verfahrens zur Berechnung des Kreisumfangs beruht darauf, die Kreislinie, durch regelmäßige Polygone (Vielecke) zu ersetzen, die sich immer enger an die gekrümmte Linie anschmiegen. Übrigens läßt sich der an sich simple Grundgedanke des Archimedischen Verfahrens heute in zahlreichen mathematischen Anwendungen verschiedenster Natur wiederfinden: Die Strategie besteht darin, ein Problem, das man nicht direkt zu lösen vermag, durch eine Folge einfacherer, lösbarer Probleme zu ersetzen, deren Lösungen die Lösung des Ausgangsproblems immer besser annähern (approximieren).

In der vorliegenden Aufgabe geht es um den Flächeninhalt des Kreises, der sich ebenfalls mit einer Folge von Polygonen näherungsweise berechnen läßt. Auch hier tritt π als Proportionalitätsfaktor auf (allerdings ist *a priori* nicht klar, warum dies derselbe ist wie beim Kreisumfang!) Mehr zu Archimedes und der Kreiszahl π erfahren sie ggf. in weiteren Aufgaben auf den kommenden Übungsblättern.

---

[a] Die Bezeichnung π stammt vom Initialbuchstaben des griechischen Wortes τὸ π̲εριμέτρον = *das(der) Perimeter bzw. der Umfang*, welches Archimedes in seinen Abhandlungen für den Kreisumfang verwendet. Sie wurde 1647 von William Oughtred eingeführt und später von anderen Gelehrten wie Barrow und vor allem Euler übernommen.

Aufgabe 4: *κύχλον μέτρησις* – Kreismessung (nach Archimedes)

Es bedeute f_n bzw. F_n die Fläche des dem Einheitskreis *einbeschriebenen* bzw. *umschriebenen* regelmäßigen n-Ecks.

a) Zeigen Sie, daß sich f_{2n} und F_{2n} mit Hilfe des geometrischen und harmonischen Mittels G, H (siehe Aufgabe 3, Blatt 2) in folgender Weise berechnen lassen:

$$f_{2n} = G(f_n, F_n), \qquad F_{2n} = H(f_{2n}, F_n).$$

Verwenden Sie bei der geometrischen Herleitung keine Winkelfunktionen sondern nur den Satz des Pythagoras und die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

b) Für ein festes $n \geq 3$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $\alpha_k := f_{2^k n}$ und $\beta_k := F_{2^k n}$. Die Folgen $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehorchen dann den Rekursionsbeziehungen

$$\alpha_{k+1} = G(\alpha_k, \beta_k) \qquad \text{und} \qquad \beta_{k+1} = H(\alpha_{k+1}, \beta_k) \qquad \text{für } k \geq 1,$$

mit den Initialisierungen $\alpha_1 = f_n$ und $\beta_1 = F_n$.

Beweisen Sie, daß die Intervalle $I_k := [\alpha_k, \beta_k]$ eine Intervallschachtelung darstellen.

c) Es bezeichne π die allen Intervallen $I_k, k \in \mathbb{N}$ angehörende Zahl, deren geometrische Bedeutung anschaulich dem Flächeninhalt des Einheitskreises entspricht. Geben Sie eine Einschachtelung von π an, wobei sie die Rekursion zunächst mit dem gleichseitigen Dreieck und ein weiteres Mal mit dem Quadrat starten. Wieviele Iterationen benötigt man, um π mit Sicherheit auf zwei Nachkommastellen genau ($\pi \approx 3.14$) berechnet zu haben?

Allgemeiner Hinweis: Die erste Klausur findet am Samstag den 10. Dezember von 10-12 Uhr statt. Die Teilnahme ist für alle verpflichtend, die an dem Übungsschein interessiert sind. Weitere Information demnächst.
Die vorliegenden Übungsaufgaben, wie die meisten Aufgaben der vorangehenden Übungsblätter, sind mit Ausnahme von Aufgabe 4a) sämtlich klausurrelevant. Dennoch ist Aufgabe 4a) insbesondere von allen Lehramtskandidaten aufgrund der Anknüpfungspunkte zur Schulmathematik mit der üblichen Sorgfalt zu bearbeiten!
Zugangsvoraussetzung zur Klausur ist eine 80-90 prozentige, *ordentliche* Bearbeitung der Übungsaufgaben. Entgegen einiger Gerüchte wird von Ihnen *keinesfalls* verlangt, 80-90 Prozent richtig zu lösen. Eine (schwierigere) Aufgabe gilt daher schon als bearbeitet, wenn Sie eine fehlgeschlagene Idee kurz skizzieren, oder, falls Sie gar keine Idee haben, die Aufgabe je nach Kontext durch Beispiele oder Gegenbeispiele illustrieren oder eine abstrakte Aufgabenstellung anschaulich formulieren. Nur wenn Sie selbständig arbeiten, können Sie von den Übungen profitieren, weil Sie dann merken, wo die Schwierigkeiten verborgen sind und umso mehr in den Übungsstunden an den entscheidenden Stellen aufhorchen.