Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Nov., WS 2005/06
Abgabe: 5. Dez. bis 10 Uhr

Analysis I

6. Übungsblatt

Klausurtraining

Aufgrund etlicher Anfragen, haben wir uns entschlossen, Ihnen anhand der folgenden Aufgaben einen Eindruck von den möglichen Klausuraufgaben zu vermitteln. Es handelt sich dabei hauptsächlich um Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrades, d.h. wer diese Aufgaben einigermaßen meistert, kann beruhigt die Klausur auf sich zukommen lassen. Sehen Sie die Fülle der Aufgaben nicht als eine zusätzliche Bürde an, die Ihnen aufgehalst wird, sondern als eine besondere Serviceleistung unsererseits, die Ihnen eine optimale Vorbereitung auf die Klausur gewähren soll. Übrigens, die Aufgaben 5 und 6 sind nicht dazu gedacht, von Ihnen ignoriert zu werden, weil sie nicht unter der Überschrift "Klausurtraining" gruppiert sind! Hier können Sie ebenfalls Techniken üben, die auch in der Klausur und darüberhinaus von großem Nutzen sind. Insbesondere Aufgabe 5 trainiert die nicht jedem angenehme Epsilontik.

Aufgabe 1: Aufwärmen per Induktion

a) Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$. (Beachten Sie, daß die *leere* Menge auch als Teilmenge gezählt wird.)

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $5^n - 1$ stets durch 4 teilbar.

Aufgabe 2: Drei wichtige Grenzwerte

a) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Weisen Sie dazu zunächst die Abschätzung $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ nach.

Tip: Schreibe $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$ und verwende die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (Aufgabe 3, Blatt 2).

Bemerkung: Bildlich gesprochen besagt der Grenzwert, daß die n-te Wurzel lineares Wachstum zu einer Konstanten, nämlich der Eins, dämpft. (Dämpfung bis hin zur Null ist nicht möglich, weil sich die Folge von rechts der Eins nähert und Eins ein Fixpunkt der Potenzfunktionen ist). Die Abschätzung verrät Ihnen, wie sich die Folge an die Eins "anschmiegt"; $\frac{1}{2}$ ist also eine untere Schranke für die Konvergenzrate.
Kann man bessere Schranken für die Konvergenzraten finden? Welche *bestimmt divergenten* Folgen werden noch von der n-ten Wurzel gedämpft bzw. welche wachsen zu schnell an, um beschränkt zu bleiben?

b) Beweisen Sie, daß für alle $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+x)^n} = 0$.

Bemerkung: Der Grenzwert sagt aus, daß exponentielles Wachstum schneller verläuft als polynomiales Wachstum und zwar so viel schneller, daß sich jedes Polynom – drastisch formuliert – durch Division mit einer Exponentialfunktion im Unendlichen zu Null "erschlagen" läßt.

c) Zeigen Sie: Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[m]{k^n}} = 0$.

Hinweis: Betrachten sie zunächst den Fall $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $n = 1$ unter Verwendung des *Archimedischen Prinzips*. Erledigen Sie den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion. Die Aufgabe ist übrigens ein Beispiel für einen Induktionsbeweis, bei dem der Induktionsanfang nichttrivial ist und mindestens ebenfalls soviel Aufwand erfordert wie der Induktionsschritt.

Aufgabe 3: Vier kleine Lemmata über Folgen

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, die keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ besitzt. Dann divergiert die Folge *bestimmt* gegen $+\infty$, d.h. für alle $M > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $a_n > M$ für alle $n \geq N$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei *streng monoton fallend* und es gelte ferner $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > a$.

c) Besitzt eine *monotone* Folge eine *konvergente* Teilfolge, so konvergiert die gesamte Folge und zwar gegen denselben Grenzwert wie ihre Teilfolge.

d) Für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > s$ für alle $n > N$.

Aufgabe 4: Iterierte Wurzeln

Betrachten Sie die Folge

$$a_1 = \sqrt{1}\,, \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}\,, \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,, \quad a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\,, \ ...$$

welche sinngemäß fortzusetzen ist.

a) Definieren Sie die Folge ohne Pünktchenschreibweise mittels einer Rekursionsbeziehung. **Tip:** Überlegen Sie, wie a_2 von a_1 abhängt bzw. a_3 von a_2 usw..

b) Berechnen Sie den möglichen Grenzwert.

c) Zeigen Sie, daß die Folge konvergiert.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 5: Ein paradigmatisches $\frac{\epsilon}{2}$-Argument (Cauchyscher Grenzwertsatz)

Folgender Satz ist zu beweisen: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so strebt auch die Folge der arithmetischen Mittel $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n := \frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ gegen a. **Tip:** Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$.

Aufgabe 6: Unbekannter Grenzwert gesucht!

Für gegebene reelle Zahlen $a_1, ..., a_k$ ist die Folge

$$n \mapsto n - \sqrt[k]{(n-a_1)\cdot ... \cdot (n-a_k)}$$

für $n > \max\{a_1, ..., a_k\}$ zu betrachten.

a) Versuchen Sie den Grenzwert durch Ausprobieren mit dem Taschenrechner zu erraten. Beginnen Sie mit $k = 2$, wählen Sie einfache Werte und n hinreichend groß.

   Tip: Der Grenzwert könnte etwas mit einem der drei Mittel zu tun haben, die in Aufgabe 3 von Blatt 2 vorgestellt wurden.

b) Beweisen Sie ihre Vermutung.

c) Versuchen Sie auch die Konvergenzrate abzuschätzen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis numerisch.