Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 5. Dez., WS 2005/06
Abgabe (freiwillig): 12. Dez. bis 10 Uhr

Analysis I

7. Übungsblatt

Halbzeit – Verschnaufen – Fehler diskutieren

Allmählich erreichen wir die Mitte des Semesters. Da Sie nicht härter rangenommen werden sollen als die hochbezahlten Profis aus der Bundesliga, dürfen Sie die kommende Woche in Anlehnung an König Fußball als Halbzeitpause betrachten. Konkret bedeutet das für Sie, daß die schriftliche Bearbeitung des vorliegenden Aufgabenblattes *freiwillig* erfolgt, d.h. Ihre (mögliche) Abgabe bzw. Nichtabgabe fließt *nicht* in die Qualifikation zur zweiten Klausur am Ende des Semesters ein. Nutzen Sie die Zeit, um uverstandene Dinge aufzuarbeiten und zur Vorbereitung der Klausur. Dabei mögen auch die folgenden Aufgaben durchaus hilfreich sein.

Die Rücksprache mit den Übungsgruppenleitern hat ergeben, daß viele unter Ihnen die Übungen gewissenhaft bearbeiten, ordentlich aufschreiben und auch in den Übungsgruppen regelmäßig erscheinen und mitarbeiten. Allerdings gibt es auch eine gewisse Fraktion von Abweichlern. Daher stellt sich die Frage, ob bei der Zulassung zur Klausur Strenge oder Milde walten soll. Getreu dem alten römischen Wahlspruch *in dubio pro reo* (Im Zweifel für den Angeklagten) haben wir uns für die letztere Option entschieden, um niemanden (außer bei gravierenden Abweichungen von den Zulassungskriterien) die Tür von Anfang an zu verschließen. Für die kommende Halbzeit sei nochmals an die Zulassungsvoraussetzungen zur zweiten Klausur erinnert:

- Regelmäßige, schriftliche Bearbeitung fast aller Übungsaufgaben (80-90%) in ordentlicher Form.
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Übungen (insbesondere Vorrechnen).

Die Übungsgruppenleiter werden verstärkt darauf Acht geben, daß diese Kriterien nicht unterlaufen werden.
Auch wenn manche unter Ihnen sauberes Schreiben für eine überflüssige Sekundärtugend halten mögen, sollte sein Wert gerade in einer Wissenschaft wie der Mathematik (bei der Genauigkeit, präzise Begriffe etc. eine große Rolle spielen) nicht unterschätzt werden. Eine Niederschrift, die sowohl äußerlich wie inhaltlich sauber und klar gegliedert ist, dient erstens dazu, mögliche Fehler aufzuspüren und die Gedanken zu ordnen. Zweitens ist es notwendig, um anderen die eigene Argumentation verständlich zu machen, ohne deren Zeit über Gebühr zu beanspruchen. Sauberes Schreiben ist daher ein Teil der mathematischen Arbeitsmethode, die sie während Ihres Studiums erlernen sollen. Beachten Sie ferner, daß den Übungsgruppenleitern bei der Kontrolle Ihrer wöchentlichen Abgaben sowie bei der Korrektur der Klausur nur ein sehr begrenztes Zeitbudget zur Verfügung steht, ohne über eine Spezialausbildung im Entziffern *kakographischer* Handschriften zu verfügen.
Für die Klausur, wünschen wir Ihnen viel Erfolg. Gehen Sie gleich zu Beginn der zweiten Halbzeit mit 1:0 in Führung! Übrigens brauchen Sie zur Klausur nur Ihre Schreibutensilien (Kuli,Bleistift,Radiergummi) mitzubringen. Papier wird gestellt; weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Aufgabe 1: Wiederholung der Vorlesung

Arbeiten Sie den Beweis der folgenden Behauptung (Vorlesung, Lemma 37) im Detail aus:

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Geben Sie genau an, welche Definitionen Sie benutzen bzw. rechtfertigen Sie jeden Schritt durch Angabe der benutzten Lemmata und Sätze.

Aufgabe 2: Richtig Argumentieren

Bei der Besprechung von Aufgabe 3b) des 5. Übungsblattes argumentierte ein Student (danke für die Inspiration), daß der Grenzwert der Summe verschwinden muß, da es sich schließlich bei jedem Summanden um eine Nullfolge handelt und die Summe von Nullfolgen nach den Grenzwertsätzen wiederum eine Nullfolge ergibt. Eine formale Ausführung[a] dieser Argumentation könnte wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+n)^2} && (1)\\
&= 0+0+\ldots+0 && (2)\\
&= 0 && (3)
\end{aligned}$$

Dabei soll Gleichung (1) aufgrund der Grenzwertsätze (Summenregel) gelten; Gleichung (2) folgt, weil jeder Summand eine Nullfoge darstellt und Gleichung (3) ergibt sich aus der additiven Neutralität der Null.

Die Argumentation führt tatsächlich zum richtigen Ergebnis, obgleich sie *falsch* ist, denn: Die Summenregel der Grenzwertsätze wurde nur für eine Summe von zwei Folgen (und damit per Induktion für eine Summe mit einer beliebig großen aber festen Anzahl von Summanden) bewiesen. Im vorliegenden Fall wächst die Anzahl der Summanden aber mit dem Folgenparameter n über jede Schranke, so daß die Summenregel nicht angewendet werden kann.
Da es nicht leicht ist, einen Fehler einzusehen, der dennoch zum richtigen Ergebnis führt, soll nun ein Beispiel betrachtet werden, bei dem die fehlerhafte Argumnetation zu einem offensichtlich falschen Resultat führt.

[a]Um die Analogie zum folgenden Gegenbeispiel umittelbar herzustellen, wird hier der erste Summand $\frac{1}{n^2}$ weggelassen; dies fügt der fehlerhaften Argumentationsweise aber keinen Abbruch zu.

$$S_n := \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \equiv \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} =: T_n$$

a) Zeigen Sie die Gleichheit der beiden Summen S_n und T_n.

b) Begründen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ und somit auch $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ existiert und echt größer 0 ist.

c) Welcher Grenzwert für T_n ergibt sich mit der fehlerhaften Argumentation aus dem Einleitungstext?

Bemerkung: Die Reihe $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ wird als *alternierende harmonische* Reihe bezeichnet, welche im Gegensatz zur *harmonischen* Reihe konvergiert. Ihre Konvergenz ergibt sich direkt aus dem *Leibnizkriterium* für alternierende Reihen monoton fallender, positiver Nullfolgen. Das Leibnizkriterium soll jedoch in dieser Aufgabe noch nicht verwendet werden. Den Grenzwert der *alternierenden harmonischen* Reihe können wir zur Zeit noch nicht berechnen, dies wird sich aber im Zusammenhang mit Potenzreihen ändern.

Die diskutierten Folgen illustrieren übrigens, daß im Grenzwert $0 \cdot \infty$ sowohl 0 als auch etwas von 0 verschiedenes sein kann. Der Ausdruck $0 \cdot \infty$ ist daher nicht definiert. Konventionsgemäß ist jedoch vereinbart: $0 \cdot \infty = 0$. Diese Vereinbarung (siehe z.B. Maßtheorie) ist allerdings nicht mit den Grenzwertsätzen kompatibel.

Aufgabe 3: Schlauberger, Besserwisser und Co.

Ein Schlauberger tischt Ihnen folgenden Beweis auf, um $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] = 0$ zu zeigen:

Beweis: Da die Folgenglieder $T_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$ alle positiv sind, ist die Folge nach unten durch 0 beschränkt. Außerdem liefert die Abschätzung $T_n < n\frac{1}{n+1} < 1$, daß die Folge auch nach oben durch 1 beschränkt ist. Somit gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} T_n \leq 1$. (Beachte, die Existenz des Limes superior ist durch die Beschränktheit gesichert, nicht aber die eines Grenzwerts!) Unter Beachtung der Rechenregel

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{4}$$

und der Tatsache, daß jeder Summand gegen 0 konvergiert und sein Limes Superior daher seinem Limes entspricht, ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] \\
&\leq 0 + \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right] \\
&\leq \qquad \vdots \\
&\leq \qquad (n-3)\text{-maliges Wiederholen liefert (ausführlicher per Induktion)} \\
&\leq \qquad \vdots \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+n-1} + \frac{1}{n+n}\right] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+n-1} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n} \\
&\leq 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Somit folgt: $0 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} T_n \leq 0$. Also muß T_n gegen 0 konvergieren. Q.E.D.

a) Mißtrauen Sie dem Schlauberger: Gilt (4) wirklich nur mit dem Kleinergleich-Zeichen? Falls Sie den Eindruck haben, daß die Beziehung richtig ist, beweisen Sie sie und geben Sie ein Beispiel an, bei dem keine Gleichheit gilt.

b) Warum ist der Beweis falsch? Decken Sie den Fehler des Schlauberges auf.

c) Ehrenrettung: Wie läßt sich die Behauptung (leicht) abändern, so daß die Beweisidee des Schlaubergers zu einem etwas umständlichen, aber dennoch gültigen Beweis ausgebaut werden kann.