Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 09. Jan., WS 2005/06
Abgabe: 16. Jan. bis 10 Uhr

Analysis I

10. Übungsblatt

Aufgabe 1: Gleichmäßige Stetigkeit auf offenen, beschränkten Intervallen

Anhand ihres Randverhaltens kann man einer auf auf einem offenen, beschränkten Intervall definierten, stetigen Funktionen leicht ansehen, ob sie dort sogar gleichmäßig stetig ist. Beachte, daß eine stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall automatisch gleichmäßig stetig ist.

Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) f ist gleichmäßig stetig.

ii) Die Grenzwerte $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow b} f(x)$ existieren.

Aufgabe 2: Charakterisierung linearer Funktionen auf $\mathbb{R}$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei *linear*, d.h. sie genüge der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die folgenden Eigenschaften sind daraus herzuleiten:

a) $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad f(rx) = rf(x)$. (Tip: Betrachte zunächst $r \in \mathbb{N}$.)

b) f stetig in 0 $\quad \Rightarrow \quad$ f stetig (auf ganz $\mathbb{R}$).

c) f stetig $\quad \Rightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} : f(x) = ax$.

Aufgabe 3: Approximation stetiger Funktionen

Eine im abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise konstant bzw. stückweise (affin-)linear, falls es eine Unterteilung des Intervall $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ gibt und reelle Zahlen c_k bzw. d_k und e_k existieren, so daß

$$f(x) = c_k \quad \text{(konstant)} \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) = d_k x + e_k \quad \text{(affin-linear)} \qquad \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k),\ k \in \{1, ..., n\}.$$

In den Stützstellen der Unterteilung wird die Funktion so definiert, daß sie dort links- oder rechtsseitig stetig ist.

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Beweisen Sie, daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine *stetige*, stückweise affin-lineare Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Lassen sich stetige Funktionen auch durch stückweise konstante Funktionen approximieren?

Aufgabe 4: Hölder-Stetigkeit ist mehr als Stetigkeit

Die meisten stetigen Funktionen, die einem gewöhnlicherweise in den Sinn kommen, sind tatsächlich Lipschitz-stetig. Dies liegt daran, daß wir uns bei stetigen Funktionen meist glatte Funktionen vorstellen, die darüberhinaus differenzierbar sind. Nun ist die Lipschitz-Stetigkeit eine fast triviale Konsequenz der Differenzierbarkeit, wie wir demnächst sehen werden. Funktionen, welche doch immerhin in einem Punkt nicht Lipschitz-stetig sind, obwohl sie dort stetig (und in einer Umgebung sogar gleichmäßig stetig sind) sind, sind durch die Wurzelfunktionen gegeben. Ihre Steigung im Ursprung ist unendlich. Für diese Funktionen ist der Begriff der Hölder-Stetigkeit "zurechtgeschneidert", welcher den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit verallgemeinert. Wie aber könnte eine Funktion aussehen, die im Nullpunkt zwar stetig nicht aber Hölder-stetig ist? Wahrscheinlich muß ihr Graph noch viel steiler in den Nullpunkt münden als dies bei den Wurzelfunktionen bereits der Fall ist, ohne dabei zu "zerreißen".

Zeigen Sie anhand eines konkreten Beispiels, daß es stetige Funktionen gibt, welche nicht Hölder-stetig sind.

Tip: Beispiele von Funktionen, welche im Nullpunkt stetig nicht aber Hölder-stetig sind, lassen sich mit Hilfe stückweise affin-linearer Funktionen konstruieren. Wählen Sie für die Stützstellen bzw. für die zugehörigen Funktionswerte geeignete Nullfolgen. Die Folge der Stützstellen $(x_n)_n$ sollte im Vergleich zur Folge der Funktionswerte $(y_n)_n$ sehr schnell konvergieren, so daß eine Abschätzung, wie sie die Hölder-Stetigkeit verlangt, nicht mehr möglich ist.