Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 30. Jan., WS 2005/06
Abgabe (freiwillig): 06. Feb. bis 10 Uhr

Analysis I

13. Übungsblatt

Aufgabe 1: Gleichmäßige Differenzierbarkeit

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, daß f' genau dann (gleichmäßig) stetig auf $[a, b]$ ist, wenn f auf $[a, b]$ *gleichmäßig differenzierbar* ist, d.h.:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall \xi \in [a, b]\ \forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a, b] : \quad \left| \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - f'(\xi) \right| < \epsilon.$$

Aufgabe 2: Ableitungen der Winkelfunktionen und Schwingungsgleichung

Diese Aufgabe setzt die Aufgabe 6 vom Blatt 12 fort.

d) Beweisen Sie, daß für jede Lösung des Anfangswertproblem

$$z(0) = a \in \mathbb{R}, \ \ z'(0) = b \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + z(t) = 0$$

die Größe $z(t)^2 + z'(t)^2$ konstant ist, d.h. eine Erhaltungsgröße darstellt. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Größe? Zeigen Sie damit, daß das Anfangswertproblem höchstens eine Lösung besitzt. **Tip:** Nehmen Sie an es gäbe zwei Lösungen. Welches Anfangswertproblem erfüllt dann ihre Differenz. Welchen Wert nimmt die zugehörige Erhaltungsgröße an?

e) Geben Sie mit Hilfe des Sinus und Kosinus die *eindeutige* Lösung des obigen Anfangswertproblems an. Dabei haben Sie ein 2 x 2-Gleichungssystem zu lösen.

f) Betrachten Sie spezielle Anfangswerte, z.B. $z(0) = \sin(\phi)$ und $z'(0) = \cos(\phi)$. Folgern Sie die Additionstheoreme, indem Sie die eindeutige Lösung auf verschiedene Weise darstellen.

Aufgabe 3: Periodizität der Winkelfunktionen

Zeigen Sie, daß der Kosinus eine positive Nullstelle besitzt (Abschätzung mittels Potenzreihe) und folgern Sie aus den Additionstheoremen die *Periodizität* von Sinus und Kosinus.

Aufgabe 4: Keine Angst vor dem Cauchy-Produkt

Falls Sie noch Probleme mit dem Cauchy-Produkt haben, arbeiten Sie die folgenden Rechnungen zum Nachweis des Additionstheorems des Kosinus durch.
Übrigens, sollten Sie mit den elementaren Eigenschaften der Binomialkoeffizienten vertraut sein, es könnte ... hm, nützlich sein. Außerdem sollten Sie von der Schule wissen, was eine gerade bzw. ungerade Funktion ist und wie sich diese Eigenschaft in der Potenzreihenentwicklung (um den Ursprung) niederschlägt. Dann verstehen Sie auch die nachfolgende Rechnung besser.

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+y)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} x^{\ell} y^{2n-\ell} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k-1} \right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(C_0 C_{2n} + C_2 C_{2n-2} + \ldots + C_{2n-2} C_2 + C_{2n} C_0 \Big) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \, \frac{(-1)^{n-k} y^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} x^{2k} y^{2n-2k} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sin(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(S_1 S_{2n-1} + S_3 S_{2n-3} + \ldots + S_{2n-3} S_3 + S_{2n-1} S_1 \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \, \frac{(-1)^{n-k-1} y^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!} x^{2k+1} y^{2n-2k-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k-1}
\end{aligned}$$