Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 06. Feb., WS 2005/06
Abgabe : 13. Feb. bis 10 Uhr

Analysis I

14. Übungsblatt

Aufgabe 1: Taylorreihen

Bestimmen Sie die Taylorreihen im Nullpunkt von

$$\text{a)}\ f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ , \qquad \text{b)}\ g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Was können Sie über die Konvergenz aussagen?

Aufgabe 2: Grenzwertberechnung mit L'Hospital

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital.

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{n} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\downarrow 0} x^x \qquad \text{e)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^{\beta}}{x^{\alpha}} \qquad \text{f)}\ \lim_{x\to\infty} x^{\alpha} e^{-\beta x}$$

In e) und f) sind α, β als positive Konstanten anzusehen.

Aufgabe 3: Taylorpolynome der Exponentialfunktion

Polynome mit mehreren (reellen) Nullstellen zeigen (im Endlichen) ein oszillierendes Verhalten. Im allgemeinen muß man davon ausgehen, daß mit zunehmenden Polynomgrad die Anzahl der reellen Nulstellen wächst und somit das Polynom zwischen seinen Wurzeln oszilliert. Da die Exponentialfunktion eine streng monotone Funktion ist, insbesondere also nicht oszilliert, stellt sich die Frage, wie die Taylopolynome aussehen, welche die Exponentialfunktion approximieren. Die folgende Aufgabe liefert diesbezüglich einigen Aufschluß.

Vergegenwärtigen Sie sich, daß das n'te Taylorpolynom der Exponentialfunktion im Nullpunkt der nach dem n'ten Glied abgebrochenen Exponentialreihe entspricht.

$$T_n(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Zeigen Sie, daß T_n keine bzw. genau eine Nullstelle besitzt, falls n gerade bzw. ungerade ist. **Tip:** Wie hängen T_n und T_{n+1} voneinander ab; welche Konsequenzen hat dies für die Nullstellen bzw. Extremstellen des einen bzw. anderen Polynoms?