Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 14. Nov., WS 2005/06

Analysis I

2. Merkblatt

Grenzwertsätze

Der Begriff des *Grenzwerts* und damit untrennbar verbunden der Begriff der *konvergenten Folge* stehen im Zentrum der Analysis, weil weitere Konzepte wie etwa Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit darauf aufbauen. Das Verhalten konvergenter Folgen unter arithmetischen Operationen ist daher von fundamentaler Bedeutung. Es stellt sich heraus, daß sich mit Grenzwerten sehr natürlich Rechnen läßt – gerade so, wie es wohl jeder erwartet. Ähnlich wichtig ist die Frage, in welcher Weise Grenzwerte Ungleichungen erhalten bzw. ob sich bestehende Ungleichungen zwischen den Folgengliedern zweier konvergenter Folgen auf ihre Grenzwerte vererben. Auch in diesem Fall sind die Aussagen wenig überraschend.

Im Folgenden seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei *konvergente* Folgen mit $\xi := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\eta := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Arithmetische Operationen

Es gelten folgende Aussagen:

1) Die *Summen-* bzw. *Differenzenfolge* $(x_n \pm y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = \xi \pm \eta.$$

2) Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann existiert der Grenzwert der Folge $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\xi.$$

3) Die *Produktfolge* konvergiert gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = \xi\eta.$$

4) Falls $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\eta \neq 0$, existiert auch der Grenzwert der *Quotientenfolge*:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n = \xi/\eta.$$

Vergleichsoperationen

Folgende Aussagen sind wahr:

5) Es gelte für alle bis auf *endlich* viele $n \in \mathbb{N}$: $x_n \geq y_n$. Dann folgt $\xi \geq \eta$.

6) Es gelte für alle bis auf *endlich* viele $n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq y_n$. Dann folgt $\xi \leq \eta$.

Nullfolgen

Unter einer Nullfolge versteht man eine Folge, welche gegen Null konvergiert.

7) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist die Produktfolge $(b_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge.

Anmerkungen

- Man beachte, daß die Aussagen 1)–4) zunächst ganz wesentlich eine *Existenzaussage* enthalten, die durch die angegebenen Gleichungen nur weiter spezifiziert wird (was für das praktische Rechnen allerdings von großer Nützlichkeit ist).

  Man hüte sich davor, *umgekehrte* Schlüsse zu ziehen wie etwa: Konvergiert die Summe zweier Folgen, so konvergiert jede Einzelfolge und die Summe der Grenzwerte (der Einzelfolgen) ist gleich dem Grenzwert der Summe (der Einzelfolgen).

- Genauer bedeutet die Voraussetzung in 5) mit der die Formulierung "bis auf endlich viele":

  $\exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall \mathbb{N} \ni k > N : \ \ x_k \geq y_k.$

- Insbesondere die wichtigen Sonderfälle sind zu beachten, welche sich ergeben, wenn eine der beiden Folgen konstant ist. Unter diesem Aspekt ist 2) redundant und kann aus 3) gefolgert werden.

- Aus 5) und 6) ergibt sich ein Konvergenzkriterium, welches unter dem Namen *Einschachtelungskriterium* (engl. squeeze theorem) firmiert:

  Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dritte Folge. Gilt $\eta = \xi$ und $y_n \leq z_n \leq x_n$ bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \xi = \eta$.

- *Strenge* oder *echte* Ungleichungen zwischen den Folgengliedern müssen sich <u>nicht</u> auf den Grenzwert übertragen. Beispiel: $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ergänzungen

- In der Sprache der Linearen Algebra bedeuten 1) und 2) zusammen, daß die Menge der konvergenten Folgen $\mathcal{S}_c$ mit den Verknüpfungen der punktweisen Addition und der S-Multiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum darstellt (Existenz des Grenzwertes). Ferner implizieren 1) und 2), daß die Abbildung $L : \mathcal{S}_c \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{S}_c \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ *linear* ist.

- Die Menge der Nullfolgen $\mathcal{S}_0$ ist ein Unterraum von $\mathcal{S}_c$. Dies kann man entweder direkt nachrechnen oder eleganter dadurch begründen, daß $\mathcal{S}_0 = \operatorname{kern} L$. Nun ist aber der Kern (Nullraum) einer linearen Abbildung stets durch einen Unterraum gegeben!

- Nimmt man noch die punktweise Multiplikation hinzu, so kann man den Vektorraum der konvergenten Folgen zu einer $\mathbb{R}$-Algebra erweitern. In diesem Kontext besagt Punkt 3) insbesondere, daß die Multiplikation mit der Grenzwertbildung verträglich (vertauschbar) ist.

- Ebenso besitzt auch die Menge der *beschränkten* Folgen die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, die die Menge der *konvergenten* Folgen als *Unteralgebra* enthält.

- Die Aussage von Punkt 8) wird algebraisch gern folgendermaßen formuliert: In der $\mathbb{R}$-Algebra der *beschränkten* Folgen ist der Unterraum der Nullfolgen ein *Ideal*.