Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. Martin Rheinländer

1. Teilklausur

Analysis 1

10. Dezember 2005

3. Abstufung

Name: ______________________________

Matr.–Nr.: ______________________________

Hauptfach: ______________________________

Nebenfach: ______________________________

Übungsgruppe: ______________________________

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	$\sum$
maximal	7	8	7	7	7	9	6	51
erreicht								

Endnote: ______________________________

Hinweise zur Bearbeitung der Klausur

(bitte sorgfältig lesen)

- Schalten Sie Ihr Handy aus – wenn Sie während der Klausur in- oder außerhalb des Hörsaals beim Telefonieren angetroffen werden, so wird dies als Täuschungsversuch gewertet.
- Es sind keine Hilfsmittel wie Taschenrechner,Vorlesungsskript, Merkblätter etc. zugelassen.
- Tragen Sie Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt ein.
- Sie können Vorder- und Rückseiten benutzen, aber Antworten zur Aufgabe **N** immer nur auf Blättern zur Aufgabe **N** schreiben.
- Wenn bei einer Aufgabe der Platz nicht ausreicht, können Sie zusätzliche Blätter erhalten – schreiben Sie sowohl die Nummer der Frage als auch Name und Matrikelnummer oben auf das Zusatzblatt.
- Konzeptpapier wird ebenfalls gestellt. Versuchen Sie sauber zu schreiben und geben Sie keine Schmierblätter ab.
- Bei allen Aufgaben können die Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitet werden; lassen Sie sich also nicht entmutigen, wenn eine Teilaufgabe nicht klappt.
- Wissensfragen sind keine Denkfragen. Falls Sie die Antwort nicht kennen, halten Sie sich nicht lange damit auf, Sie verlieren sonst zuviel Zeit.
- Kommentieren Sie Ihre Rechnungen ausführlich; im Zweifel besser mehr als zu wenig. Resultate aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 2 Stunden.

Viel Erfolg!

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________

Aufgabe 1: Wissensfragen, Fragen à la MeGa

a) Die reellen Zahlen werden mittels eines Satzes von Axiomen eingeführt. In welche Gruppen teilt man die Axiome gewöhnlicher Weise ein? Ist $\mathbb{Z}$ ein Körper? Wenn ja warum, wenn nein warum nicht?

b) Warum ist eine konstante Folge konvergent? Beweisen Sie dies kurz anhand der Definition des Grenzwerts.

c) Geben Sie die Definition einer Cauchyfolge in der Quantorenschreibweise an.

d) Eine Aussage A sei *notwendig* für eine weitere Aussage X. Schreiben Sie dies mit dem Implikationspfeil.

e) Sei $m \in \mathbb{N}$. Welche Elemente enthält die Menge $M_m := \{n \in \mathbb{N} | \, \frac{n+m}{2} \in \mathbb{N}\}$?

f) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Welche der folgenden Ausdrücke sind für beliebige $a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$ identisch zu $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$:

$$1) \prod_{j=m+1}^{n+1} a_{j+1} \qquad 2) \prod_{t=n}^{m} a_t \qquad 3) \prod_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} \qquad 4) \prod_{\ell=0}^{n-m} a_{m+\ell}$$

g) (ohne Wertung): Von welchem Wort leitet sich die Bezeichnung π der Kreiszahl ab?

Lösung:

a) Körperaxiome, Anordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom. Das einzige Axiom, welches in $\mathbb{Z}$ nicht gilt, ist die Existenz multiplikativ inverser Elemente. Daher ist $\mathbb{Z}$ kein Körper.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a :\Leftrightarrow \; \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N : \quad |a_n - a| < \epsilon.$
Bei einer konstanten Folge $a_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Grenzwert c. N kann in diesem Fall beliebig und damit unabhängig von ϵ gewählt werden, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$.

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $:\Leftrightarrow \; \forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > N : \quad |a_n - a_m| < \epsilon$.

d) $X \Rightarrow A$ (Immer wenn X erfüllt ist, folgt A, d.h. A ist notwendig für X.)

e) Ist m gerade, so ist $M_m = 2\mathbb{N}$ (Menge der geraden Zahlen), andernfalls (m ungerade) gilt $M_m = 2\mathbb{N} + 1$ (Menge der ungeraden Zahlen).

f) Mit dem angegebenen Produkt stimmen nur das Produkt 3) und 4) überein.

Aufgabe 1: (Fortsetzung)

Name: ______________________________ **Matr.–Nr.:** ______________________________

Aufgabe 2: Zum Einstieg – Axiome und vollständige Induktion

a) Beweisen Sie möglichst detailliert mit den Axiomen der reellen Zahlen folgende Rechenregel aus der Bruchrechnung: *Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.* In Formeln:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Führen Sie beim Nachweis pro Zeile nur jeweils eine Umformung aus und geben Sie an, aufgrund welches Axioms diese gerechtfertigt ist.

b) Die folgende Behauptung ist mittels vollständiger Induktion nachzuweisen:

$$\textit{Für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ ist } a_n := \tfrac{n}{6} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n^3}{3} \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

a) Bei den folgenden Rechnungen geben die seitlichen Kommentare an, welches Axiom benutzt wird, um zur nächsten Zeile zu gelangen.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} & \stackrel{\text{def}}{=} & (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) & |\text{Assoziativität} \\
& = & \big[(a \cdot b^{-1}) \cdot c\big] \cdot d^{-1} & |\text{Kommutativität} \\
& = & \big[c \cdot (a \cdot b^{-1})\big] \cdot d^{-1} & |\text{Assoziativität} \\
& = & \big[(c \cdot a) \cdot b^{-1}\big] \cdot d^{-1} & |\text{Assoziativität} \\
& = & (c \cdot a) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) & |\text{siehe unten} \\
& = & (c \cdot a) \cdot (d \cdot b)^{-1} & |\text{2 x Kommutativität} \\
& = & (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} & \\
& \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{ac}{bd} &
\end{array}$$

Bei der fünften Umformung wurde von folgender Identität Gebrauch gemacht: $(b^{-1} \cdot d^{-1}) = (d \cdot b)^{-1}$. Zum Nachweis dieser Gleichung verifizieren wir die Eigenschaft des Inversen $(x^{-1} \cdot x = 1)$, also: $(b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot (d \cdot b) = 1$.

$$\begin{array}{rcll}
(b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot (d \cdot b) & = & (b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot (d \cdot b) & |\text{Assoziativität} \\
& = & \big[(b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot d\big] \cdot b & |\text{Assoziativität} \\
& = & \big[b^{-1} \cdot (d^{-1} \cdot d)\big] \cdot b & |\text{Eigenschaft des Inversen} \\
& = & \big[b^{-1} \cdot 1\big] \cdot b & |\text{Kommutativität} \\
& = & \big[1 \cdot b^{-1}\big] \cdot b & |\text{Eigenschaft der 1} \\
& = & b^{-1} \cdot b & |\text{Eigenschaft des Inversen} \\
& = & 1 &
\end{array}$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage: $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr, denn $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Zu zeigen ist: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d.h. unter Verwendung der Induktionsannahme $a_n = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} \in \mathbb{N}$ nachzuweisen.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} & = & \frac{n+1}{6} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} \\
& = & \underbrace{\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}}_{=a_n \in \mathbb{N}} + \underbrace{n + n^2 + n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=1 \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Da die Menge der natürlichen Zahlen abgeschlossen bezüglich der Addition ist (d.h. $\mathbb{N}+\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$) folgt, daß der obige Ausdruck eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2: (Fortsetzung)

Name: ______________________________ **Matr.–Nr.:** ______________________________

Aufgabe 3: Ungleichungen

a) Zeigen Sie: $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$ für $0 \leq a < b$.

b) Zeigen Sie: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b > 0$.

Folgende Ungleichung ist dabei zu benutzen: Für $u > v > 0$ und $x > y > 0$ gilt: $ux + vy > uy + vx$.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rlcll} & \frac{a}{1+a} & < & \frac{b}{1+b} & |\text{Multiplikation mit } (1+a)(1+b) > 0 \\ \Leftrightarrow & a + ab & < & b + ab & |\text{Addition von } -ab \\ \Leftrightarrow & a & < & b & |\text{wahr nach Voraussetzung} \end{array}$$

Bei der Verifikation dieser Ungleichung haben wir folgende Anordnungsaxiome benutzt: Monotonie der Multiplikation mit positiven Zahlen, Monotonie der Addition

b) Falls $a = b$ ergibt sich Gleichheit.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir nun $a > b$ an. (Beachte, daß beide Seiten der Ungleichung symmetrisch in a, b sind, das heißt sie sind invariant gegenüber der Umbenennung von a in b und b in a. Dadurch läßt sich der dritte Fall $b > a$ durch Umbenennung auf den Fall $a > b$ zurückführen.)

Aus $a > b$ folgt wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Diese Ungleichung geht durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}} > 0$ über in die äquivalente Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{a}}$. Setzt man nun

$$u := a > b =: v \qquad x := \frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{a}} =: y$$

in die angegebene Ungleichung ein, so erhält man die Ungleichung $a\frac{1}{\sqrt{b}} + b\frac{1}{\sqrt{a}} > a\frac{1}{\sqrt{a}} + b\frac{1}{\sqrt{b}}$, aus welcher sich die Behauptung unter Beachtung von $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$ bzw. $b = \sqrt{b}\sqrt{b}$ unmittelbar ergibt.

Aufgabe 3: (Fortsetzung)

Name: ____________________________ **Matr.–Nr.:** ____________________________

Aufgabe 4: Arithmetisch-geometrisches Mittel – Intervallschachtelung

Es seien $a < b$ zwei positive, reelle Zahlen, welche die beiden folgenden rekursiven Folgen definieren:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b \quad \text{und für } n \in \mathbb{N}_0 \quad a_{n+1} = G(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = A(a_n, b_n) \; .$$

Wie üblich, bezeichnet A das *arithmetische Mittel* und G das *geometrische Mittel.*

Zeigen Sie, daß die Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Intervallschachtelung darstellen. **Tip:** Weisen Sie nach, daß sich die Intervalllänge bei jeder Iteration mindestens halbiert.

Bemerkung: Der gemeinsame Grenzwert der Folgen $(a_n), (b_n)$ wird als *arithmetisch-geometrisches* Mittel bezeichnet.

Lösung:

1) Nachweis der *Inklusionseigenschaft*: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

   Der Beweis kann direkt geführt werden, wenn wir auf die folgende allgemeine Ungleichung zurückgreifen:

   $$\forall x, y > 0, x < y : \quad x < G(x,y) < A(x,y) < y \qquad (*)$$

   Es folgt unmittelbar für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$:

   $$\begin{array}{cc} & a_n < G(a_n, b_n) < A(a_n, b_n) < b_n \\ \Leftrightarrow & a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \\ \Rightarrow & [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \; . \end{array}$$

2) Nachweis der *Kontraktionseigenschaft:* $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

   Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; b_n - a_n \le 2^{-n}(b_0 - a_0)$ (Nachweis erfolgt per Induktion)

   Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial, da $2^{-0} = 1$.

   Induktionsschritt:

   $$\begin{array}{rcl} b_{n+1} - a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \\ & \le & \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} a_n - a_n \; = \; \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) \; = \; 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0) \end{array}$$

   Dabei haben wir bei der Abschätzung die aus $0 < a_n < b_n$ folgende Ungleichung $a_n < \sqrt{a_n b_n}$ (siehe oben) verwendet und im letzten Schritt die Induktionsannahme eingesetzt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ ergibt sich die Kontraktionseigenschaft sofort aus der Abschätzung, die gerade besagt, daß sich die Intervalllänge in jedem Schritt mindestens halbiert.

3) Beweis von $(*)$:

   $$\begin{array}{cc} \text{i)} & x < G(x,y) \\ \Leftrightarrow & x < \sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow & x^2 < xy \\ \Leftrightarrow & x < y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \text{ii)} & G(x,y) < A(x,y) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \\ \Leftrightarrow & 4xy < x^2 + 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 < (x-y)^2 \\ \Leftrightarrow & 0 < y - x \\ \Leftrightarrow & x < y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \text{iii)} & A(x,y) < y \\ \Leftrightarrow & \frac{x+y}{2} < y \\ \Leftrightarrow & x + y < 2y \\ \Leftrightarrow & x < y \end{array}$$

   Damit sind die drei Teil-Ungleichungen auf die nach Voraussetzung wahre Beziehung $x < y$ zurückgeführt.

Aufgabe 4: (Fortsetzung)

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________

Aufgabe 5: Rekursive Folgen

a) Betrachten Sie die Folge

$$a_1 = 1\ , \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\ , \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}\ , \quad a_4 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}}\ , \ldots$$

welche sinngemäß fortzusetzen ist. Definieren Sie die Folge ohne Pünktchennotation mittels einer Rekursionsbeziehung.

b) Berechnen Sie den möglichen Grenzwert der Folge, welche durch folgende Iterationsvorschrift beschrieben wird:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

a) Durch scharfes Hinschauen läßt sich ein “Muster” erkennen: $a_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a_1}}}\ , \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a_2}}}\ , \ldots.$
Die Rekursionsformel lautet daher: $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}}$.

b) Falls die angegebene rekursive Folge einen Grenzwert a besitzt, läßt sich dieser durch Grenzübergang aus der Rekursionsformel bestimmen. Vermöge der Grenzwertsätze erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 2}.$$

Beachte, daß der Quotientensatz der Grenzwertsätze anwendbar ist, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ (siehe unten) und somit $a_n + 2 > 2 > 0$. Daher ist der Grenzwert des Nenners $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2) \geq 2 > 0$ von Null verschieden.
Somit muß der mögliche Grenzwert a eine Lösung der folgenden Gleichung sein:

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha & = & \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 + 2\alpha & = & \alpha + 1 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 + \alpha - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha + \frac{1}{2})^2 & = & \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow & \alpha & = & \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \end{array}$$

Induktiv ergibt sich, daß alle Folgenglieder *positiv* sind.

Induktionsanfang: $a_1 = 1$ ist positiv.
Induktionsschritt: Ist a_n positiv, so sind $a_n + 1$ bzw. $a_n + 2$ positiv und damit ist auch der Bruch $\frac{a_n+1}{a_n+2}$ positiv, welcher a_{n+1} definiert.

Daher kommt für a nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung in Betracht, d.h. falls die Folge konvergiert, so gilt $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Aufgabe 5: (Fortsetzung)

Name: ______________________________ **Matr.–Nr.:** ______________________________

Aufgabe 6: Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 26n - (-1)^n}{111 - 2n + 32n^2 + 11n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad a, b > 0$

Lösung:

a) Antwort: $\frac{4}{11}$ (Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms, direkte Anwendung der Grenzwertsätze).

b) **Behauptung:** Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Zum Beweis der Behauptung sei an die Standardabschätzung der p-ten Wurzel ($p \in \mathbb{N}$) erinnert (siehe Übungsaufgaben): $\sqrt[p]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{p}$, für $x > -1$.

O.B.d.A. können wir $a \geq b \Leftrightarrow 1 \geq \frac{b}{a}$ voraussetzen. Wir erhalten dann folgende Einschachtelung:

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} = a \sqrt[n]{1 + \left(\tfrac{b}{a}\right)^n} \leq a \sqrt[n]{1+1} \leq a(1 + \tfrac{1}{n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Somit erhalten wir vermöge des Einschachtelungsprinzip (Sandwich-Theorem):

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a = \max\{a, b\}$. Beachte, daß die Abschätzung (Ersetzung von $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ durch 1) die Monotonie der Wurzel benutzt. Außerdem wurde verwendet: $0 < x < 1 \;\Rightarrow\; 0 < x^n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6: (Fortsetzung)

Name: ______________________________ **Matr.–Nr.:** ______________________________

Aufgabe 7: Beweisaufgabe

Man beweise: Eine monotone Folge habe eine Teilfolge, die nach $+\infty$ divergiert. Dann divergiert die gesamte Folge nach $+\infty$.

Lösung: Zunächst sei an die Definition erinnert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, C > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n > N : \quad b_n > C$$

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge. Dann gilt entweder für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1)\ \ a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{oder} \qquad 2)\ \ a_n \leq a_{n+1}\ .$$

Per Induktion folgt im Fall 1): $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_1 \geq a_n$. Damit ist a_1 eine obere Schranke für die Menge aller Folgenglieder. Insbesondere gibt es zu $C > a_1$ kein Folgenglied, welches größer als C ist. Damit kann es aber auch keine Teilfolge geben, welche gegen $+\infty$ divergiert. Somit muß Fall 2) erfüllt sein, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *monoton wachsende* Folge.

Sei nun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diejenige streng monotone Abbildung, welche die Teilfolge $(a_{\sigma_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ herausgreift, die gegen $+\infty$ konvergiert. (Beachte, daß eine streng monotone Abbildung der natürlichen Zahlen in sich selbst stets streng monoton wachsend sein muß.)

Es ist nun nachzuweisen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der obigen Definition genügt. Sei dazu $C > 0$ beliebig vorgegeben. Da $(a_{\sigma_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ divergiert, existiert dazu $M \in \mathbb{N}$ mit $a_{\sigma_\nu} > C$ für alle $\nu > M$.
Wähle für N (aus der Definition) $\sigma_{(M+1)} \in \mathbb{N}$. Aufgrund des monotonen Wachstums der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann für alle $n > N = \sigma_{(M+1)}$:

$$a_n \geq a_N = a_{\sigma_{(M+1)}} > C$$

Somit genügt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der obigen Definition; d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Aufgabe 7: (Fortsetzung)