Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. Martin Rheinländer

2. Teilklausur

Analysis 1

4. Februar 2006

4. Iteration

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matr.–Nr.: ______________________________

Hauptfach: ______________________________

Nebenfach: ______________________________

Übungsgruppen-Nr.: ______________________________

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	$\sum$
maximal	9	4	7	8	10	6	7	51
erreicht								

Endnote: ______________________________

Hinweise zur Bearbeitung der Klausur

(bitte sorgfältig lesen)

- Schalten Sie Ihr Handy aus – wenn Sie während der Klausur in- oder außerhalb des Hörsaals beim Telefonieren angetroffen werden, so wird dies als Täuschungsversuch gewertet.
- Es sind keine Hilfsmittel wie Taschenrechner, Vorlesungsskript, Merkblätter etc. zugelassen.
- Tragen Sie Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt ein.
- Sie können Vorder- und Rückseiten benutzen, aber Antworten zur Aufgabe **N** immer nur auf Blättern zur Aufgabe **N** schreiben.
- Wenn bei einer Aufgabe der Platz nicht ausreicht, können Sie zusätzliche Blätter erhalten – schreiben Sie sowohl die Nummer der Frage als auch Name und Matrikelnummer oben auf das Zusatzblatt.
- Konzeptpapier wird ebenfalls gestellt. Versuchen Sie sauber zu schreiben und geben Sie keine Schmierblätter ab.
- Bei fast allen Aufgaben können die Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitet werden; lassen Sie sich also nicht entmutigen, wenn eine Teilaufgabe nicht klappt.
- Kommentieren Sie Ihre Rechnungen ausführlich; im Zweifel besser mehr als zu wenig. Resultate aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 3 Stunden.

Viel Erfolg!

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 1: Verständnisfragen à la MeGa

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Schreiben Sie mit Hilfe von Quantoren die Aussagen:

   1) f hat ein Minimum
   2) f hat kein Minimum
   3) f hat ein lokales Minimum.

b) Konvertieren Sie die Zahl $0.12\overline{02} = 0.1202020202...$ vom Dreiersystem ins Dezimalsystem. Es genügt die Darstellung als Bruch.

c) Bilden Sie eine Implikationskette mit den Begriffen *gleichmäßig stetig*,*stetig* und *global Lipschitz-stetig*.

d) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Welche Monotonie hat die Verkettung? Die Antwort ist sorgfältig zu begründen.

Lösung:

a)
1) $\exists x \in \mathbb{R} : \ \forall y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \leq f(y)$
2) $\forall x \in \mathbb{R} : \ \exists y \in \mathbb{R} : \quad f(x) > f(y)$
3) $\exists x \in \mathbb{R} : \ \exists \epsilon > 0 : \ \forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) : \quad f(x) \leq f(y)$

b) Umwandlung des periodischen b-adischen Bruchs zur Basis $b = 3$ mittels der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} 0.12\overline{02} &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3^2} + \tfrac{2}{3^4} + \tfrac{2}{3^6} + ... = \tfrac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{3^{2n}} = \tfrac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{9^n} \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{9^n} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\tfrac{1}{1-\frac{1}{9}} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\tfrac{1}{\frac{8}{9}} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\tfrac{9}{8} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{12} \end{aligned}$$

c) Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig.

d) Die Verkettung $f \circ g$ ist ebenfalls streng monoton wachsend.
Beh.: $x < y \Rightarrow \big(f \circ g\big)(x) < \big(f \circ g\big)(y)$
Bew.: g streng monoton wachsend: $x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$
f streng monoton wachsend: $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$
Setze $u := g(x) < g(y) =: v$. Dann folgt: $f\big(g(x)\big) < f\big(g(y)\big)$
Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Definition der Verkettung $f \circ g$.

Aufgabe 1: (Fortsetzung)

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 2: Minibeweis zum Einstieg

Seien $\xi, c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie sehr sorgfältig:

Gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - c| < \epsilon$ falls $|x - \xi| < \delta$, so gilt $\lim_{x\to\xi} f(x) = c$.

Lösung:

Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge, welche gegen ξ konvergiert. Es ist zu zeigen, daß dann $\big(f(x_n)\big)_n$ gegen c konvergiert. Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \epsilon$ für alle $x \in U_\delta(\xi)$. Da $(x_n)_n$ nach Annahme gegen ξ konvergiert, existiert definitionsgemäß ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\mathbb{N} \ni n > N$ gilt $x_n \in U_\delta(\xi)$. Dies impliziert aber $|f(x_n) - c| < \epsilon$ für alle $n > N$. Somit konvergiert $\big(f(x_n)\big)_n$ gegen c.

Notation: $U_\delta(\xi) := \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$

Aufgabe 2: (Fortsetzung)

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________ **Punkte:** $\square$

Aufgabe 3: Grenzwerte & Konvergenzradien

a) Welchen Konvergenzradius besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

b) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[5^n + (-5)^n\right] x^n$.

c) Geben Sie eine Potenzreihe an, deren Konvergenzintervall genau durch das halboffene Intervall $(-2, 2]$ gegeben ist.

d) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ an, wobei die Koeffizienten a_n durch

$$a_n := \frac{1 - 2 + 3 - 4 + ... - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie dazu zunächst $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lösung:

a) Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich sofort der Konvergenzradius $R = 1/\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \frac{1}{3}$.

b) Es gilt: $a_n = 5^n + (-5)^n = 5^n\big(1 + (-1)^n\big)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für a_n ergibt sich somit die Folge $2,\ 0,\ 2{\cdot}5^2,\ 0,\ 2{\cdot}5^4,\ ...$ und damit erhalten wir für die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte: 0 und 5, denn:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5\sqrt[n]{2} & \text{für } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Somit gilt: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 5 \quad \Rightarrow \quad$ Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{5}$.

c) Man erinnere sich an die *harmonische* bzw. *alternierende harmonische* Reihe, welche divergiert bzw. konvergiert. Dies motiviert folgende Potenzreihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

d) Offenbar gilt

$$\begin{aligned} 1 - 2 + 3 - 4 + ... - 2n &= (1-2) + (3-4) + ... + \big((2n-1) - 2n\big) \\ &= \underbrace{(-1) + (-1) + ... + (-1)}_{n\text{-mal}} = -n\ . \end{aligned}$$

Aufgrund der Grenzwertsätze (insbesondere Quotientensatz) und wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ sowie der Folgenstetigkeit der Quadratwurzel folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1.$$

Bemerkung: Der Zähler des Bruchs läßt sich natürlich auch ohne Pünktchenschreibweise darstellen, es gilt: $1-2+3-4+...-2n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k = -n$. Das zweite Gleichheitszeichen läßt sich streng formal per Induktion nachweisen.

Aus dem Quotientenkriterium zur Berechnung des Konvergenzradius R folgt dann

$$1 = \frac{-1}{-1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = R$$

Aufgabe 3: (Fortsetzung)

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 4: Rund um den Mittelwertsatz

a) Die Ableitung von $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Zeigen Sie, daß f auf (a,b) global Lipschitz-stetig ist.

b) Sei f eine Funktion wie in Teil a) beschrieben. Beweisen Sie ohne direkten Bezug auf eine der Übungsaufgaben, daß für jede Folge $(x_n)_n$, welche gegen den Intervallrandpunkt a konvergiert, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.

c) Es seien $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f(0) = g(0)$ sowie $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \geq 0$. Zeigen Sie, daß dann $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt.

Lösung:

a) Aus der Vorausausetzung folgt unmittelbar die Existenz einer Zahl $L > 0$ mit $|f'(x)| < L$ für alle $x \in (a,b)$. Es seien nun $u, v \in (a,b)$ mit $u < v$ beliebig vorgegeben. Der Mittelwertsatz garantiert nun die Existenz eines $z \in (u,v)$ mit

$$f(u) - f(v) = f'(z)(u-v) \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| = \underbrace{|f'(z)|}_{<L} \cdot |u-v|$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Beträge und schätzen $|f'(z)|$ durch L ab, so zeigt sich, daß f (global) Lipschitz-stetig ist, wobei L als Lipschitz-Konstante fungiert.

b) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, welche innerhalb des offenen Intervalls (a,b) von rechts gegen a konvergiert. Da f auf (a,b) Lipschitz-stetig ist, folgt für $m, n \in \mathbb{N}$

$$|f(a_n) - f(a_m)| < L|a_n - a_m|.$$

Da $(a_n)_n$ konvergiert, handelt es sich um eine Cauchy-Folge. Aus der obigen Abschätzung ist zu entnehmen, daß $\big(f(a_n)\big)_n$ ebenfalls eine Cauchy-Folge ist, denn zu $\epsilon > 0$ existiert stets ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a_m| < \epsilon/L$ für alle $m, n > N$. Damit ist $\big(f(a_n)\big)_n$ ebenfalls eine Cauchy-Folge und es existiert $\alpha := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

c) Wir betrachten die Funktion $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := g(x) - f(x)$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt dann:

$$h(0) = g(0) - f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0.$$

Somit ist h *monoton wachsend*, da die Ableitung h' nicht negativ ist. Insbesondere folgt die Behauptung:

$$0 = h(0) \leq h(x) = g(x) - f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \leq g(x)\ .$$

Aufgabe 4: (Fortsetzung)

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** $\boxed{}$

Aufgabe 5: Differenzieren

a) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Stellen Sie das Ergebnis mit $\tan(x)$ dar (ohne Verwendung von Sinus und Kosinus).

b) Berechnen Sie die Ableitung des Arcustangens arctan (Umkehrfunktion des Tangens). Benutzen Sie das Ergebnis aus a).

c) Berechnen Sie die Ableitungen der Hyperbelfunktionen

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und drücken Sie das Ergebnis wieder durch die Hyperbelfunktionen aus. Zeigen Sie anschließend, daß die Ableitung von $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2$ verschwindet, und begründen Sie damit, daß $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ gilt.

d) Berechnen Sie die Ableitung von $(f \circ g \circ h)/(g' \circ h)^2$. Kürzen Sie wenn möglich.

Lösung:

a) Anwenden der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\big[-\sin(x)\big]}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

Somit ist der Tangens eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$. Benutzt man die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ so erhält man alternativ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

b) Ableitung der Umkehrfunktion: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = 1/(f' \circ f^{-1})(x)$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{1 + \tan^2\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{1+x^2}$$

c) Durch gliedweises Differenzieren ergeben sich aus den Reihendarstellungen sofort die folgenden Ableitungsregeln:

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Mittels der Summen- und Kettenregel erhält man dann:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\cosh^2(x) - \sinh^2(x)\Big) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^2(x) - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^2(x) \\ &= 2\cosh(x)\cosh'(x) - 2\sinh(x)\sinh'(x) \\ &= 2\cosh(x)\sinh(x) - 2\sinh(x)\cosh(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da die Ableitung überall verschwindet, ist die Funktion $x \mapsto \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ konstant. Insbesondere gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \cosh^2(0) - \sinh^2(0) = 1^2 - 0^2 = 1$.

d) Anwenden der Ketten- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f \circ g \circ h}{(g' \circ h)^2}\right]' &= \frac{(f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h' \cdot (g' \circ h)^2 - (f \circ g \circ h) \cdot 2(g' \circ h) \cdot (g'' \circ h) \cdot h'}{(g' \circ h)^4} \\ &= \frac{(f' \circ g \circ h) \cdot h'}{g' \circ h} - \frac{2(f \circ g \circ h) \cdot (g'' \circ h) \cdot h'}{(g' \circ h)^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (Fortsetzung)

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________ **Punkte:** $\boxed{}$

Aufgabe 6: Gleichmäßige Konvergenz

Betrachten Sie die Folge der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit Begründung:

a) Wie lautet der punktweise Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_n$?

b) Konvergiert die Folge gleichmäßig auf $[0,1]$?

c) Konvergiert die Folge auch gleichmäßig auf $[1,\infty)$?

Lösung:

a) Mittels der Grenzwertsätze erhalten wir für alle $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{n^{-2}+x^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2}+x^2} = 0\cdot\frac{1}{x} = 0.$$

Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n(0) = 0$. Daher strebt die Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

b) Die Funktionenfolge konvergiert auf $[0,1]$ **nicht** gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn:

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right| \;\geq\; \left|f_n(\tfrac{1}{n})-0\right| \;=\; \tfrac{1}{1+1} \;=\; \tfrac{1}{2}\,.$$

c) Die Antwort lautet JA aufgrund der folgenden Abschätzung:

$$0 \leq f_n(x) \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2} \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{x^2} \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

Bei der letzten Abschätzung haben wir von der Voraussetzung $x \geq 1$ Gebrauch gemacht. Somit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$, so daß für alle $n \geq N$ gilt

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x)| < \epsilon.$$

Dies bedeutet aber gerade gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 6: (Fortsetzung)

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 7: Hyperbelfunktionen (Thema: Potenzreihen)

In Analogie zu den Winkelfunktionen (Kreisfunktionen) definiert man die *Hyperbelfunktionen* durch die Potenzreihen:

Cosinus hyperbolicus: $\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Sinus hyperbolicus: $\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Beweisen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts die Verdopplungsformel

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x).$$

Lösung:

Zunächst betrachten wir die Potenzreihendarstellung von $\sinh(2x)$, welche sehr leicht aus der Reihe des Sinus hyperbolicus gewonnen werden kann:

$$\sinh(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad (*)$$

Es bezeichnen C_j, S_j und P_j die Summanden (Reihenglieder) der cosh- bzw. sinh-Reihe und der Produktreihe zum Index $j \in \mathbb{N}_0$. Unter Beachtung von $C_{2k+1} = 0$ und $S_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, berechnen sich P_{2n} und P_{2n+1} nach dem *Reihenproduktsatz von Cauchy* wie folgt:

$$\begin{aligned}
P_{2n} &= \underbrace{S_0C_{2n}}_{=0} + \underbrace{S_1C_{2n-1}}_{=0} + \underbrace{S_2C_{2n-2}}_{=0} + \underbrace{S_3C_{2n-3}}_{=0} + \ldots + \underbrace{S_{2n-2}C_2}_{=0} + \underbrace{S_{2n-1}C_1}_{=0} + \underbrace{S_{2n}C_0}_{=0} = 0 \\
P_{2n+1} &= \underbrace{S_0C_{2n+1}}_{=0} + S_1C_{2n} + \underbrace{S_2C_{2n-1}}_{=0} + S_3C_{2n-2} + \ldots + S_{2n-1}C_2 + \underbrace{S_{2n}C_1}_{=0} + S_{2n+1}C_0
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2\sinh(x)\cosh(x) &= 2\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 2\sum_{n=0}^{\infty}\big(P_{2n} + P_{2n+1}\big) = 2\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(S_1C_{2n} + S_3C_{2n-2} + \ldots + S_{2n-1}C_2 + S_{2n+1}C_0\Big) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} S_{2k+1}C_{2n-2k} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!}\, x^{2n+1} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^{2n+1} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{2n+1}\, x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Vergleich von (*) mit (**) liefert die angegebene Verdopplungsformel.

Bei der Rechnung haben wir von folgender Identität Gebrauch gemacht: $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$. Diese ergibt sich sofort aus der Summe und der Symmetrie der Binomialkoeffizienten: $\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} = 2^{\nu}$ und $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 7: (Fortsetzung)