Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 12. Dez., WS 2005/06

Analysis I

Sonderblatt vom Nikolaus

Diese Aufgaben stammen aus dem Sack des Nikolaus, kriegen Sie die Lösung raus?

Aufgabe 1: Ergänzung zur geometrischen Reihe

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Bestimmen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$. Wie hängt diese Reihe mit der geometrischen Reihe zusammen und wie ergibt sich ihr Limes aus dem Grenzwert der geometrischen Reihe. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Sicht der Differentialrechnung, soweit sie Ihnen aus der Schule bekannt ist.
Keine Scherzfrage: Warum ist der Buchstabe q so beliebt im Zusammenhang mit geometrischen Reihen?

Aufgabe 2: Teleskopsummen

Unter *Teleskopsummen* versteht man Ausdrücke, welche "geschickt aufgeblasen" sind (z.B. durch elegantes Einfügen der 0), um sie in Gestalt einer Summe zu schreiben. Durch Umformen und Umgruppieren lassen sich die Summanden gegenseitig wegheben, wobei meist ein oder zwei Terme vom Anfang bzw. Ende der Summation übrig bleiben. Die Summe läßt sich also wie ein ausziehbares Teleskop zusammenschieben. Daher sind Teleskopsummen eigentlich Folgen im Gewand einer Reihe. In analoger Weise existieren auch *Teleskopprodukte*.

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $b_1 := a_1$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 2$.

   Zeigen Sie, daß die zur Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe genau dann konvergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Im Falle der Konvergenz gilt dann $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Wie verhält sich die Reihe zur Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n - a_{n+1}$?

b) Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen (**Tip**: Partialbruchzerlegung der Summanden).

$$\text{i)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

   Begründen Sie, warum die Reihen inverser Qudaratzahlen bzw. inverser Kubikzahlen ebenfalls konvergieren.

Aufgabe 3: Wundersames

Durch die Iterationsvorschrift $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ mit der Initialisierung $a_1 = 2$ wird eine Folge definiert.

a) Berechnen Sie die ersten Folgenglieder; können Sie eine zweite Rekursionsbeziehung erkennen? Leiten Sie daraus ab, daß die Folgenglieder paarweise teilerfremd sind. **Tip:** Das Produkt der Folgenglieder spielt dabei eine große Rolle.

b) Zeigen Sie, daß sich die inversen Folgenglieder zu 1 aufaddieren, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} = 1$.

   Tip: Berechnen Sie die n-ten Partialsummen und versuchen Sie diese allein durch a_{n+1} auszudrücken.

Aufgabe 4: Gehäufte Häufungspunkte

Bekanntlich lassen sich alle reellen Zahlen durch rationale Zahlen approximieren, d.h. man kann zu jeder reellen Zahl x in der Menge $\left\{\frac{m}{n} \mid\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\} \equiv \mathbb{Q}$ eine Folge finden, welche gegen x konvergiert. Im folgeden sollen Mengen mit ähnlichen Eigenschaften untersucht und charakterisiert werden.

a) Zeigen Sie, daß jede reelle Zahl Häufungspunkt der Menge $W := \left\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \mid \; m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist, d.h. zu jeder reellen Zahl existiert eine Folge in W, welche gegen diese konvergiert. **Tip:** Beachte, ist $y \in W$ so ist auch jedes Vielfache von $y \in W$.

b) Wie sieht das Konvergenzverhalten der Folge $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. der Folge $(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ aus. Versuchen Sie die wesentlichen Eigenschaften zu extrahieren und eine Verallgemeinerung zu finden, welche a) als Sonderfall umfaßt.

Aufgabe 5: Verallgemeinerung des Leibnizkriteriums

Das Leibnizkriterium behauptet, daß die alternierende Reihe einer monoton fallenden (positiven) Nullfolge konvergiert. Tatsächlich läßt sich aus jeder beliebigen (sogar komplexwertigen) Nullfolge eine konvergente Reihe erhalten, wenn man Vorzeichen entsprechend anbringen darf.

Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexwertige Nullfolge. Zeigen Sie, daß eine Vorzeichenfolge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\sigma_n \in \{-1, 1\}$ existiert, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z_n$ konvergiert.
Hinweis: Es mag sinnvoll sein, zunächst den Spezialfall einer beliebigen, reellwertigen Nullfolge zu untersuchen.