Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 20. Dez., WS 2005/06

Analysis I

Sonderblatt vom Christkind

Weihnachts-Aufgaben

Aufgabe 1: Potenzzahlen gegen Primzahlen

Die vorliegende Aufgabe wurde durch die Frage angeregt, ob es mehr Potenzzahlen oder mehr Primzahlen gibt. Dabei verstehen wir unter einer Potenzzahl eine natürliche Zahl größer 1, welche sich als Quadrat, Kubus oder als höhere Potenz einer anderen natürlichen Zahl darstellen läßt. Primzahlen sind bekanntlich Zahlen, welche durch keine andere natürliche Zahl als durch 1 und sich selbst teilbar sind. Da 1 i.a. nicht als Primzahl angesehen wird, ist 2 die kleinste Primzahl. Es ist zu beachten, daß sich jede natürliche Zahl, welche keine Primzahl ist, in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen schreiben läßt (Primfaktorzerlegung). Folgende Mengenschreibweisen seien noch eingeführt:

$$\mathcal{P}_r := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \} \qquad \mathcal{P}_o := \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2 : \ \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 2 : \quad n = k^m \} \ .$$

Bevor Sie weiterlesen, halten Sie bitte kurz inne, um die obige Frage spontan, aus dem Bauch heraus und ohne langes Nachdenken zu beantworten. Wenn Sie wollen, können Sie auch andere Leute ihrer Umgebung mit dieser Frage "nerven" und eine kleine Statistik der Antworten anfertigen.
Ohne eine kurze Bedenkzeit läßt sich diese Frage natürlich nur durch reines Raten beantworten; somit sollten die Antworten durchnittlich gleichverteilt zugunsten der drei Möglichkeiten (kleiner, gleich, größer) ausfallen. Interessanter ist es zu beobachten, welche Antworten sich ergeben, wenn diese auf eine Überlegung gestützt sind. Je nachdem welche Gedanken bei der Frage als erstes durch den Kopf schießen, gelangt man mit durchaus plausiblen Argumenten zu jeder der drei möglichen Antworten.
Bedenkt man beispielsweise, daß jede Zahl unendlich viele Potenzen besitzt, demgegenüber aber bei weitem nicht alle Zahlen Primzahlen sind (es gibt sogar unendlich große Primzahllücken), so ist die Vermutung naheliegend, daß mehr Potenzzahlen als Primzahlen existieren. Andererseits, schätzt man im Zahlenbereich von 1 bis 100 die Anzahl der Primzahlen (ca 25, d.h. jede vierte Zahl) gegenüber der Anzahl der Potenzzahlen ab (10 Quadrdatzahlen, desweiteren $2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 3^3, 3^4, 4^3$), dann ist man geneigt, die Menge der Primzahlen für die größere zu halten. Eine dritte Reaktion könnte im Unverständnis der Frage bestehen, denn schließlich enthalten beide Menge unendlich viele Elemente. Doch wie will man die Größe zweier unendlicher Mengen vergleichen? Da beide Mengen Teilmengen der natürlichen Zahlen sind, sind sie jeweils abzählbar unendlich groß und somit "gleich groß" im Sinne des Konzepts der Mächtigkeit von Mengen.
Wir sehen, daß die Beantwortung unserer Ausgangsfrage nicht *ad hoc* möglich ist und eigentlich zunächst einer Klärung bedarf, um festzulegen, mit welchem Maß die Größe der Mengen gemessen werden soll. Doch darin besteht gerade der Reiz der Frage, denn das Problem besteht nicht nur im Auffinden einer richtigen bzw. passenden Antwort sondern schon in der präzisen Formulierung der Fragestellung (Was wollen wir eigentlich genau wissen?).
Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von unserer Ausgangsfrage und behandeln vor allem ein paar Formeln, denen eine gewisse Ästhetik nicht abzusprechen ist. Einige der Teilaufgaben lassen sich jedoch dazu nutzen, die Ausgangsfrage in einem speziellen Sinne zu beantworten.

Die folgenden Aussagen und Formeln sind zu beweisen. Haben Sie keine Skrupel bei der Vertauschung der Summationsreihenfolge im Falle von (ungeordneten) Mehrfachsummen. Aufgrund der Positivität der Folgenglieder kann im Prinzip nichts schiefgehen.

a) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

b) Es gibt unendlich große Primzahllücken.

c) Nützliche Vorüberlegung: Es seien $p, q \in (0,1)$. Berechnen Sie die (ungeordnete) Doppelsumme $\sum_{i,j\geq 0} p^i q^j$. Zur Kontrolle: Für $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{5}$ ergibt sich das hübsche Ergebnis $\frac{5}{2}$.

d) Sie wissen bereits aus der Vorlesung oder ggf. von den Nikolausaufgaben (Aufgabe 2), daß die Summe der reziproken Quadratzahlen beschränkt ist. Entsprechendes gilt aufgrund des Majorantenkriteriums für alle höheren Potenzen. Zeigen Sie nun: Die Summe der Reziprokwerte *sämtlicher* Potenzzahlen ist ebenfalls beschränkt.

   Tip: Eine Möglichkeit besteht darin, folgende Gleichung nachzuweisen: $\sum\limits_{k,m\geq 2} \frac{1}{k^m} = 1$. Sie können aber auch eine "brutale" Abschätzung mittels der geometrischen Reihe durchführen.

e) Die Summation in d) durchläuft die Menge der Potenzzahlen nicht einmalig; viele Potenzzahlen kommen mehrfach vor, weil die Darstellung k^m nicht eindeutig ist. Sollen dagegen alle Potenzzahlen nur einziges mal erfaßt werden, so gilt die folgende, bemerkenswerte Gleichung: $\sum\limits_{n\in\mathcal{P}_o} \frac{1}{n-1} = 1$

f) Es sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen. $\mathcal{E}_N$ bezeichne die Menge aller natürlicher Zahlen, die durch die ersten N Primzahlen erzeugt werden, d.h. $\mathcal{E}_N := \{n \in \mathbb{N} \mid n = p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_N^{e_N}, \;\; e_1, ..., e_N \in \mathbb{N}_0\}$. Für (rationales) $s > 0$ gilt dann die folgende Identität:

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \, .$$

Tip: Erinnern Sie sich an Ihre Vorüberlegung in Teil c).

g) Die Zeta-Funktion ist für alle $s > 1$ durch $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ definiert. Beachten Sie, daß die Reihe auf der rechten Seite für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergent ist. Die folgende, nachzuweisende Produktdarstellung geht auf Euler zurück: $\zeta(s) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$

h) Die Reihe der reziproken Primzahlen ist *divergent.* **Tip:** Greifen Sie auf die Divergenz der harmonischen Reihe ($s = 1$) zurück, um die Divergenz des unendlichen Produkts zu folgern. Zeigen Sie sodann, daß die Divergenz des Produktes die Behauptung impliziert. Beachten Sie, daß durch Exponenzieren bzw. Logarithmieren eine Summe in ein Produkt bzw. ein Produkt in eine Summe überführt werden kann. Desweiteren sind die Standardabschätzungen für die Exponetial- bzw. Logarithmusfunktion zu benutzen.

Erahnen Sie, wie schnell oder besser wie langsam die Reihe der reziproken Primzahlen divergiert?

i) Können Sie nun eine Antwort auf die Ausgangsfrage geben?

Klassische Approximationen des Altertums, Teil 3

Aufgabe 2: Babylonisches Wurzelziehen

Das *Babylonischen Wurzelziehen* ist eine rekursive Vorschrift zur näherungsweisen Berechnung der Quadratwurzel:
Sei $a \geq 0$, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$x_0 > \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} := \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{a}{x_n}) \tag{1}$$

gegen $\sqrt{a}$. Dabei ist x_0 ein beliebiger Startwert größer $\sqrt{a}$.

Dieses Verfahren ist uns durch babylonische Keilschrifttafeln sowie einige Jahrhunderte später durch den antiken Mathematiker und Ingenieur Heron überliefert, der im ersten Jahrhundert nach Chr. in Alexandria wirkte und dessen Werken wir einen wesentlichen Einblick in den damaligen Wissensstand von Mathematik, Naturwissenschaften und Technik verdanken. (siehe auch W.Walter, Analysis I)

Wie vieles in der antiken Mathematik so besitzt auch das babylonische Wurzelziehen einen anschaulichen, geometrischen Hintergrund, denn die Bestimmung von $\sqrt{a}$ entspricht dem Auffinden eines Quadrates mit dem Flächeninhalt a, so daß $\sqrt{a}$ durch seine Seitenlänge gegeben ist. Dieses Quadrat kann man rekursiv durch eine Folge von Rechtecken mit konstantem Flächeninhalt a annähern. Man startet die Rekursion beispielsweise mit einem Rechteck, dessen Seitenlängen durch 1 und a gegeben sind. Für die Seitenlängen des $(n+1)$-ten Rechtecks wählt man das *arithmetische Mittel* der Seitenlängen des n-ten Rechtecks sowie den Kehrwert des Mittels multipliziert mit a. Auf diese Weise bleibt der Flächeninhalt der Rechtecke stets gleich a, während sich das Verhältnis der Seiten (erstaunlicherweise) der Eins annähert. Die Rechtecke werden also zunehmend "quadratischer". (Was passiert eigentlich, wenn man statt des arithmetischen Mittels, das geometrische oder harmonische Mittel wählt?)

Ein anderer Zugang zu der Rekursionsvorschrift ergibt sich aus der Perspektive der Fixpunktverfahren. Darunter versteht man Verfahren, welche die Gleichung $x = f(x)$ mit einer gegebenen Funktion f durch die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ zu lösen versuchen. Ist x eine Schätzung für $\sqrt{a}$ und $e := \sqrt{a} - x$ der Fehler, so gilt $a = (x+e)^2 \approx x + 2ex$ unter der Annahme, daß e klein ist. Ersetzen wir nun e durch seine Definition und stellen die Gleichung nach $\sqrt{a}$ um, so erhalten wir $\sqrt{a} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) =: f(x)$. Tatsächlich stellt $\sqrt{a}$ als Fixpunkt der Funktion f heraus, d.h. es gilt $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich ein dritter Zugang zu (1) ergibt, indem man das Nullstellenproblem $x^2 - a = 0$ approximativ mit dem *Newton-Verfahren* löst.

a) Zeigen Sie, daß für die in (1) definierte Folge gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

b) Es bezeichne $\epsilon_n := x_n - \sqrt{a}$ den Fehler nach der n-ten Iteration. Leiten Sie aus der Gleichung $\epsilon_{n+1}^2 = \frac{\epsilon_n^2}{2x_n}$ die folgende Fehlerabschätzung her:

$$\epsilon_{n+1} \leq 2\sqrt{x}\left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\right)^{2^n} = \frac{1}{(2\sqrt{x})^{2^n - 1}}\,\epsilon^{2^n} \, .$$

Warum spricht man in diesem Zusammenhang von *quadratischer Konvergenz*?

c) Schreiben Sie das Verfahren als Intervallschachtelung und diskutieren Sie diese analog zu Aufgabe 3 von Blatt 4.

d) Vergleichen Sie anhand von selbstgewählten Beispielen das babylonische Wurzelziehen mit der auf dem arithmetisch-harmonischen Mittel beruhenden Methode. Welches Verfahren besitzt die besseren Konvergenzeigenschaften?

e) Leiten Sie ein allgemeineres Verfahren zur Berechnung der p-ten Wurzel her und beweisen Sie seine Konvergenz.

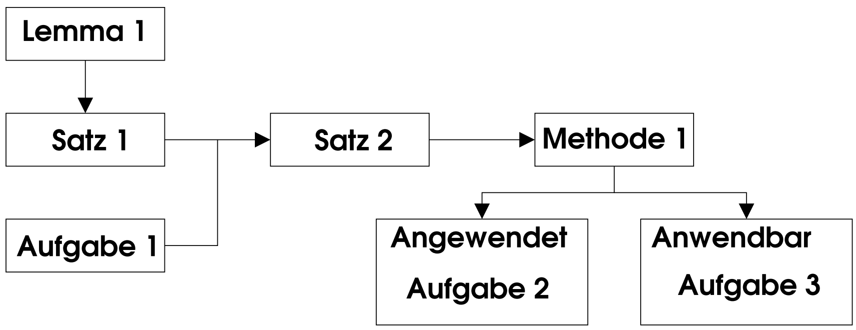
   Bemerkung: Das Verfahren kann übrigens dazu genutzt werden, einen *konstruktiven* Existenzbeweis für die p-te Wurzel zu führen.

Aufgabe 3: Kreatives Nacharbeiten – Wer erstellt die schönsten Schaubilder?

Wenn Sie das Gefühl haben, daß das Mathematikstudium Sie vor lauter Rechnerei und Beweiserei nur sehr einseitig anspricht und Ihre Fähigkeiten z.B. im gestalterischen und kreativen Bereich völlig verkümmnern läßt, dann sollen Sie jetzt auf Ihre Kosten kommen. Die Aufgabe besteht darin, beim Nacharbeiten der Vorlesung bzw. der Übungen ansprechende, farbenfrohe und einprägsame Mnemogramme, Struktogramme, Diagramme, Organigramme etc. zu erstellen, die zum Beispiel

- einen Globalüberblick über die bisherige Vorlesung darstellen,
- ein Kapitel der Vorlesung aufgreifen und die Abhängigkeiten der Definitionen, Lemmata und Sätze veranschaulichen,
- die Vernetzung der Übungsaufgaben mit der Vorlesung wiedergeben,
- Beziehung und Abhängigkeiten der Übungsaufgaben untereinander thematisieren,
- mehr oder weniger schwer erkennbare "rote Fäden" aufdecken.

Die besten und kunstvollsten Arbeiten werden natürlich prämiert. Außerdem könnten Ihre "Kunstwerke" auf der Vorlesunghomepage veröffentlicht werden. Die folgende Abbildung soll eine ganz bescheidene Vorstellung davon vermitteln, was wir meinen.



Sie können mit dem Computer arbeiten, aber auch eine ordentliche "Handarbeit" wird gern akzeptiert. Grundsätzlich freuen wir uns über jeden Beitrag. Wenn Sie andere gute Ideen haben und diese lieber umsetzen wollen, sind auch diese bestimmt willkommen. Wer also zum Beispiel gerne dichtet, könnte auch ein kleines Lehrgedicht verfassen.
Außerdem sind wir an konstruktiver Kritik zur Vorlesung bzw. zu den Übungen interessiert. Wenn es z.B. Aufgaben gibt, die Sie interessieren und die bisher noch nicht oder nur unzureichend behandelt worden sind, lassen Sie uns dies wissen. Eine Feedback-Umfrage wird eventuell auch gegen Ende des Semesters durchgeführt.