Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

07. Nov., WS 2005/06

Analysis I

1. Ergänzungsblatt

Bei der Durchsicht Ihrer Lösungen ist aufgefallen, daß (fast) niemand den Fehler in dem Beweis der Schmunzelaufgabe (2. Übungsblatt) richtig erkannt hat. Etliche unter Ihnen scheinen noch Schwierigkeiten mit dem generellen Verständnis des Induktionsprinzips zu haben. Aber auch die zutreffenderen Kommentare entbehren einer pointierten Lokalisierung der Ungenauigkeit bzw. des Fehlers, der letztlich für das Zusammenbrechen des Induktionsbeweises verantwortlich ist. Ihre Kommentare sind daher an der entscheidenden Stelle ebenso schwammig gehalten wie der fehlerhafte Induktionsbeweis.
Da sich aus Fehlern oft besonders gut lernen läßt (aufgrund des Kontrasteffekts), haben wir uns der Mühe unterzogen, den fehlerhaften Induktionsbeweis einmal ausführlich zu diskutieren und zu analysieren. Der Vollständigkeit halber sei hier die ursprüngliche Aufgabenstellung noch einmal abgedruckt.

Aufgabenstellung

Kommentieren Sie den Beweis von folgendem **Satz:** Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)
Induktionsanfang ($n = 1$)*:* Es ist offensichtlich, daß in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.
Induktionsschritt $\big(n \geq 1,\ A(n) \Rightarrow A(n+1)\big)$*:* Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n+1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.

Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Pferde dieselbe Farbe haben. □

Kommentar

Das interessante Moment bei dem obigen Satz und seinem "Beweis" besteht darin, daß die Behauptung offensichtlich falsch ist, während der Beweis auf den ersten Blick keinen Fehler aufzuweisen scheint. Tatsächlich ist der Beweis formal richtig, bis auf einen einzigen Punkt, der aber durch eine etwas unpräzise, akzentuierte Formulierung geschickt überspielt wird. Dies mag bei einem suggestiven mündlichen Vortrag des Beweises wohl noch besser gelingen als bei der schriftlichen Wiedergabe!

Analyse

Um den Beweis *genau* zu verstehen müssen wir ihn zunächst *genau* aufschreiben. Die Aussage "Alle Pferde haben die gleiche Farbe" formulieren wir erst etwas um. Sei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl aller Pferde. Wir versuchen zu zeigen, daß $A(m)$ wahr ist, wobei $A(n)$ die Aussage "Alle Pferde in einer Gruppe der Größe n haben die gleiche Farbe" abgekürzt. Da wir m nicht kennen (irgendeine große natürliche Zahl) sind wir auf der sicheren Seite, wenn wir nachweisen, daß

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

wahr ist, denn dies bedeutet, $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.
Als Beweisstrategie wählen wir die Induktion. Dazu müssen wir zwei Aussagen nachweisen:

- Induktionsanfang: zeige $A(1)$ ist wahr
- Induktionsschritt: zeige wann immer $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Schauen wir uns den Induktionsanfang an. $A(1)$ ist die Aussage “Alle Pferde in einer Gruppe der Größe 1 haben die gleiche Farbe”. Diese Aussage stimmt sicherlich, da es in einer solch kleinen Gruppe gar kein anderes Pferd gibt, das eine andere Farbe haben könnte. $A(1)$ ist also wahr.

Betrachten wir nun den vermeintlichen Induktionsschritt im angegebenen Beweis. Die tatsächlich bewiesene Aussage lautet:

Ist $A(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ *und* $n \geq 2$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Diese Aussage weicht jedoch geringfügig von derjenigen Aussage ab, deren Nachweis das Induktionsprinzip benötigt (siehe unten).

Gehen wir zunächst den Beweis im Detail durch: Wenn $n \geq 2$ ist, dann ist $n+1 \geq 3$, d.h. die Pferdegruppe enthält mindestens drei Pferde. Nennen wir die Pferde $P_1, P_2, P_3, ...P_{n+1}$. Nehmen wir P_1 heraus, so haben die Pferde der Gruppe $P_2, P_3, ...P_{n+1}$ die gleiche Farbe aufgrund der Induktionsannahme für eine Gruppe der Größe n. Genauso haben die Pferde der Gruppe $P_1, P_3, ...P_{n+1}$ die gleiche Farbe. Also hat P_2 die gleiche Farbe wie $P_3, ...P_{n+1}$ und auch P_1 die gleiche Farbe wie $P_3, ...P_{n+1}$ und somit haben alle Pferde der Gruppe die gleiche Farbe. Um dieses Transitivitätsargument (wenn A=B und B=C dann A=C) anwenden zu können, muß mindestens ein Vergleichspferd zur Verfügung stehen.

Beachten Sie, daß der Beweis nicht funktioniert, wenn wir die Annahme $n \geq 2$ fallen lassen (die Existenz eines Vergleichspferdes ist dann nicht mehr für jedes $n \in \mathbb{N}$ gesichert!). Das ist aber genau das Problem! Der Induktionsschritt verlangt den Beweis der Aussage:

Ist $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dies leistet der angegebene Beweis aber *nicht*, da die Zusatzbedingung $n \geq 2$ gestellt wird (natürlich ohne direkten Hinweis, um den Leser/Zuhörer zu täuschen).

Beachten Sie übrigens, daß der obige vermeintliche Induktionsschritt ein *korrekter* Induktionsschritt zur Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : A(n)$$

ist. Für diese Behauptung schaffen wir es allerdings nicht, den Induktionsanfang $A(2)$ nachzuweisen, da es ja tatsächlich zwei Pferde mit verschiedenen Farben gibt.

Fazit

Was lernen wir daraus? Beide Bestandteile des Induktionsbeweises sind von entscheidender Bedeutung.

- Der beste Induktionsschritt ist nutzlos, wenn die Verankerung im *Induktionsanfang* fehlt. Auch wenn dieser oftmals sehr einfach nachzuweisen ist, darf er keinesfalls fehlen.
- Ein korrekter Induktionsanfang bringt nichts, wenn der *Induktionsschritt* nicht sauber vollzogen werden kann. Bei der Durchführung des Induktionsschrittes hat man akribisch genau darauf zu achten, daß nur die Induktionsvoraussetzung benutzt wird und nicht weitere (implizite) Annahmen einfließen.