Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

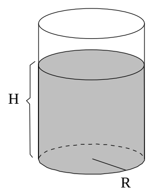
Ausgabe: 31. Okt., WS 06/07
Abgabe : 06. Nov. bis 12 Uhr

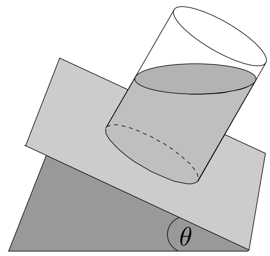
Analysis III

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1: Das kippende Bierglas (Pflicht)

Gegeben sei ein bis zur Höhe H mit Bier gefülltes, zylinderförmiges Glas mit Radius R. Das Glas werde auf eine schräge, rutschfeste Unterlage mit dem Neigungswinkel θ gestellt.





a) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Flüssigkeit in Abhängigkeit von θ?

b) Bestimmen Sie den kritischen Winkel θ_{krit}, bei dem das Glas umzufallen droht, wobei wir von der Idealisierung eines masselosen Glases ausgehen. θ_{krit} ist dadurch definiert, daß sich der Schwerpunkt der Flüssigkeit genau über der Begrenzungslinie der Grundfläche befindet. Wird das Glas weiter gekippt, so liegt der Schwerpunkt außerhalb der Grundfläche, weshalb das Glas umkippt.

Hinweis: Der Schwerpunkt eines Volumens (Punktmenge) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit homogemer Masseverteilung berechnet sich nach der Formel $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{x}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}$. Dabei bezeichnet $|\Omega|$ das Volumen von Ω im Sinne des Inhalts, d.h. $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}$. Außerdem steht $\mathbf{x}$ für den Ortsvektor.

Aufgabe 2.2: Attraktive Kugeln (Pflicht)

Es bezeichnen $B(\mathbf{r_1}, R_1)$ bzw. $B(\mathbf{r_2}, R_2)$ die Kugeln um $\mathbf{r}_1$ bzw. $\mathbf{r}_2$ mit den Radien R_1 bzw. R_2. Berechnen Sie das folgende Integral; dabei gelte $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| > R_1 + R_2$, so daß sich die Kugeln nicht gegenseitig durchdringen.

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = \int_{B(\mathbf{r_1},R_1)} \int_{B(\mathbf{r_2},R_2)} \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^3}\, \mathrm{d}^3\mathbf{y}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

Erläuterung: (nur für Interessierte)
Denkt man sich die Kugeln als *homogene* Volumenmassen mit den räumlich konstanten Dichten ρ_1 und ρ_2, so entspricht das obige Integral bis auf einen Proportionalitätsfaktor der Anziehungskraft (z.B. aufgrund von Gravitation, entgegengesetzter elektrischer Ladung), welche $B(\mathbf{r_2}, R_2)$ auf $B(\mathbf{r_1}, R_1)$ ausübt. Aus Symmetriegründen erscheint es sehr einleuchtend, daß diese Kraft parallel zum Verbindungsvektor $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ der Mittelpunkte gerichtet sein muß. Weniger intuitiv ist dagegen die Tatsache, daß der Betrag der Anziehungskraft, also $\|\mathbf{F}_{2\to 1}\|$ von derselben Größe ist wie bei in $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sitzenden Punktteilchen mit der jeweils gleichen Masse. Der Beweis dieses Sachverhalts ist durch die Berechnung des obigen Integrals zu erbringen. Dabei sollte man folgendes Ergebnis erhalten:

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = \tfrac{16}{9}\pi^2 R_1^3 R_2^3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}.$$