Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 14. Nov., WS 06/07
Abgabe : 20. Nov. bis 12 Uhr

Analysis III

4. Übungsblatt

Hinweise zur Notation: Im Kontext der Volumen-, Oberflächen- und Kurvenintegrale kursieren die verschiedensten Schreibweisen, mit denen Sie vertraut werden müssen. Sei $\mathcal{S}$ ein parametrisiertes Flächenstück und f eine darauf erklärte Funktion, so setzt man

$$\underbrace{\int_{\mathcal{S}} f}_{\text{Kurznot. Vorl.}} \quad = \int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}a(\mathbf{x}).$$

$\mathrm{d}a$ steht für das skalare Flächenelement (eng. area), $\mathbf{x}$ gibt die Abhängigkeiten an und weist daraufhin, nach welcher Variable zu integrieren ist. $\mathrm{d}a = \|\mathbf{t_r} \times \mathbf{t_s}\|\mathrm{d}r\mathrm{d}s$ mit $\mathbf{t_r}, \mathbf{t_s}$ als Tangentialvektoren in Richtung der Parameter r, s. Im Gegensatz zum skalaren Flächenelement $\mathrm{d}a$ bezeichnet $\mathrm{d}\mathbf{a}$ das vektorielle Flächenelement (Vektor senkrecht zur Tangentialebene), also $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{n}\mathrm{d}a = \mathbf{t_r} \times \mathbf{t_s}\mathrm{d}r\mathrm{d}s$. $\mathrm{d}v$ steht für das Volumenelement z.B. $\mathrm{d}v = \mathrm{d}(x, y, z)$. $\mathrm{d}\mathbf{l}$ kürzt das Längenelement ab, also $\mathrm{d}\mathbf{l} = \gamma'(t)\mathrm{d}t$, wobei $\gamma(t)$ die Parametrisierung einer Kurve darstellt. Fernner deutet ein Kringel im Integralzeichen an, daß sich das Integral auf eine geschlossene Kurve bzw. Oberfläche bezieht.

Aufgabe 4.1: Einfache & nützliche Konsequenzen des Gauß'schen Integralsatz (Pflicht)

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt berandet, so daß der Gauß'sche Integralsatz anwendbar ist.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{vol}(\Omega) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, \mathrm{d}a(\mathbf{x})$.

Dabei bezeichnet $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ den (normierten) Normalenvektor an der Stelle $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

b) Es sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ glatt. Begründen Sie:

$$\int_{\Omega} \partial_k f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}v(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}a(\mathbf{x})$$

$n_k(\mathbf{x})$ entspricht der k'ten Komponente des lokalen (normierten) Normalenvektors.

Aufgabe 4.2: Zum Beweis des Gauß'schen Integralsatz in 2D (Pflicht)

Es sei $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach-geschlossene Kurve. Der Einfachheit halber soll zusätzlich angenommen werden, daß $\mathscr{C}$ glatt und das Innnere $\mathrm{Int}(\mathscr{C})$ konvex ist. Ferner sei $\mathbf{A}$ in einer offenen Obermenge von $\overline{\mathrm{Int}(\mathscr{C})}$ ein glattes Vektorfeld.

a) Beweisen Sie unter den obigen Voraussetzungen die folgende Gleichung ohne Verwendung irgendwelcher Resultate aus der Vorlesung:

$$\int_{\mathrm{Int}(\mathscr{C})} \mathrm{div}\mathbf{A} \, \mathrm{d}v = \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{A} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{a}$$

b) Versuchen Sie das Kurvenintegral $\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ in ein Integral über $\mathrm{Int}(\mathscr{C})$ umzuwandeln.

Aufgabe 4.3: Σedemichra incognito! (Pflicht)

a) Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ beschränkte und glattberandete Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{vol}(\Omega_1) = \mathrm{vol}(\Omega_2)$. Beweisen Sie:

$$\int_{\partial\Omega_1} x_3 \mathrm{d}\mathbf{a}(\mathbf{x}) \;=\; \int_{\partial\Omega_2} x_3 \mathrm{d}\mathbf{a}(\mathbf{x}).$$

Beim Anblick dieser Formeln läßt sich die Erinnerung an glückliche Kindheitstage kaum zurückhalten. Es ist wirklich schon sehr lange her, aber das Bild ist noch deutlich vor Augen. Fröhlich planschend hatte man in der Badewanne gesessen und sich bemüht dem neuen Plastikfisch endlich das Tauchen beizubringen. Doch jeder Versuch schlug fehl. Das dumme Tier stellte sich immer wieder tot und zog es vor, "Kiel oben" auf der Wasseroberfläche zu treiben. Die ältere Schwester hatte für die Enttäuschung über den langweiligen Plastikfisch nur wenig Mitgefühl aufbringen können. "Es sei doch logisch, dieser Fisch müsse halt ständig atmen und wolle nach Luft schnappen." Dann hatte sie sich kichernd davongeschlichen. Mal schauen, wer heute die bessere Erklärung parat hat.

b) (Abgabe in zwei Wochen) Es sei $\mathcal{P}$ das Parallelpiped, welches von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1/2} \\ 0 \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{1/2} \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{1/2} \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

aufgespannt werde. Ferner bezeichne D die Funktion, die jedem Punkt seinen Abstand zur y-Achse zuordnet. Gesucht ist

$$\int_{\mathcal{P}} D^2(\mathbf{x})\ \mathrm{d}v(\mathbf{x}).$$

Aufgabe 4.4: Manchmal steckt der Teufel im Detail (Vorteil & WAVE)

a) Bekanntlich verallgemeinert die Transformationsformel die Substitutionsformel in mehreren Dimensionen. Doch wie sieht es mit dem Betrag der Jacobi-Determinante aus, davon war bei der Substitutionsformel nie die Rede?

b) **Pat & Paterchon als Mathematik-Studenten**
Seit geraumer Zeit erfüllen sich Pat und Paterchon – das drollige Duo aus der Stummfilmzeit – endlich einen lang gehegten Wunsch. Beide sind nun schon im dritten Semester an der *Alma Mater* immatrikuliert, um sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften zu widmen. Das wöchentliche Lernpensum erledigen sie mit großer Hingabe, ja Freude. Während mancher Kommilitone verdrießlich Telfonbuch-dicke Wälzer voller dröger Gesetzestexte und lateinischer Namen in sein Kurzzeitgedächtnis hämmert, gilt es in der Mathematik, Ideen zu verstehen. Da Mutter Natur den beiden die Fähigkeit zum logischen Denken in die Wiege gelegt hat, wundert es nicht, wenn sie die Übungsaufgaben eher als Vergnügen denn als Qual empfinden. Sie schätzen es, ihr Wissen anzuwenden und sich so neue Zusammenhänge zu erschließen.

Seit einigen Wochen sind sie damit beschäftigt, die Geheimnisse der Integralrechnung zu lüften. Besonders der *Satz von Cavalieri* hat es ihnen angetan. Eine grandiose Idee: Man zerlegt eine Menge, deren Inhalt zu berechnen ist, in Teilmengen von geringerer Dimension, z.B. Volumen in Flächen oder Flächen in Kurven. Die Inhalte dieser Teilmengen lassen sich oft viel einfacher bestimmen als der Inhalt der Ausgangsmenge. Ist dies der Fall, so muß man nur über die Inhalte der Teilmengen integrieren – ein eindimensionales Integral über den Scharparameter – und, schwup, ergibt sich auch schon der gesuchte Inhalt der Ausgangsmenge.

Soeben haben Sie mit dieser raffinierten Methode das Volumen eines Zylinders bzw. Kegels der Höhe H mit einer beliebigen Grundfläche bestimmt. Nun wollen sie auch den Mantelflächen dieser Objekte durch eine glasklare Rechnung auf die Spur kommen. Pat übernimmt den Fall des Zylinders, während Paterchon den Kegelmantel in Angriff nimmt. Pat führt seine Rechnung folgendermaßen durch:

Es bezeichne $L(0)$ die Länge der Grundline bzw. $L(h)$ die Länge der Umrißlinie des Querschnittes in der Höhe h. Dann sollte sich die Oberfläche des Zylindermantels wie folgt ergeben:

$$\mathrm{area}(\text{Zylindermantel}) = \int_0^H L(h)\ \mathrm{d}h = L(0) \int_0^H \mathrm{d}h = L(0)H$$

Dabei hat Pat ausgenutzt, daß $L(h)$ beim Zylinder tatsächlich konstant ist, weil die Umrißlinie des Querschnitts stets dieselbe ist. Paterchons Rechnung sieht ganz ähnlich aus; sein Fall ist jedoch ein wenig komplizierter. Die Länge des Querschnitt-Umrisses ergibt sich hier unter Verwendung der Strahlensätze zu $L(h) = \frac{H-h}{H} L(0)$:

$$\mathrm{area}(\text{Kegelmantel}) = \int_0^H L(h)\ \mathrm{d}h = L(0) \int_0^H \frac{H-h}{H} \mathrm{d}h = L(0)(H - \tfrac{1}{2}H) = \tfrac{1}{2} L(0) H$$

Beglückt vergleichen Sie ihre Resultate, die ob ihrer eleganten Schlichtheit tiefe Einblicke in die komplizierten Zusammenhänge gewähren. Da äußert Pat den Vorschlag, ihre Formeln nun für den konkreten Fall eines Kreiszylinders bzw. Kreiskegels auszuwerten und mit der Formelsammlung zu vergleichen. Tiefe Ratlosikeit überkommt die beiden, als sie feststellen müssen, daß sich Paterchons Ergebnis für den Spezialfall nicht auf die im Nachschlagewerk angegebene Formel reduziert, während Pats Formel korrekt zu sein scheint. Auch im Fall eines quadratischen Kegels (Pyramide) mit ebenen Mantelteilflächen stimmt Paterchons Formel nicht.
Plötzlich durchzuckt es Paterchon – blitzartig wird er von einem genialen Gedanken erfaßt. "Pat, Du weißt, daß Auswendiglernen nicht gerade zu meinen Stärken zählt. So kenne ich z.B. nur die Formel für das Volumen einer Kugel auswendig nicht aber für ihre Oberfläche. Diese ergibt sich zum Glück durch reines Differenzieren aus jener. Ökonomisch oder?" Verdutzt blickt Pat den kleinen Dicken an. "Das glaub ich Dir nicht! Du hast bestimmt heut' schon was getrunken, gib's zu." "Nein Pat, schau mal her" erwidert Paterchon und erklärt ihm seinen Trick. Als bei Pat endlich der Groschen fällt, ist er voller Begeisterung. "Großartig, warum soll das nicht auch beim Kegel funktionieren." "Genau das hatte ich vor, Pat. Volumen ausrechnen, ableiten und zack, kennt man auch schon die Oberfläche."

Jetzt wird es Zeit für Sie, endlich einzugreifen. Vollziehen Sie Paterchons Rechnung im Detail nach. Mißtrauen Sie dem Burschen an jeder Stelle und versuchen Sie, den Einsatz der Strahlensätze zu rechtfertigen. Warum ist Pats Lösung richtig aber Paterchons Ergebnis falsch. Ist Paterchons erneute Idee brauchbar oder gibt es einen Haken. Entwickeln Sie eine Vermutung, unter welchen Umständen die simplen Rechnungen funktionieren, und versuchen Sie diese zu beweisen.