Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 21. Nov., WS 06/07
Abgabe : 27. Nov. bis 12 Uhr

# Analysis III

**5. Übungsblatt**

## Aufgabe 5.1: Get familiarized with ODEs! (Pflicht)

a) Klassifizieren Sie die **Clairautsche Differentialgleichung**

$$y = xy' - g(y'),$$

wobei $g$ eine näher zu spezifizierende Funktion darstellt.

b) Wenn $g$ im allgemeinen *nichtlinear* ist, erlaubt die Differentialgleichung dennoch eine *lineare* Lösung?

c) Es soll zusätzlich angenommen werden, daß die Ableitung von $g$, also $g'$, eine differenzierbare Umkehrfunktion $h$ besitzt. Überprüfen Sie, daß die durch $f(x) := xh(x) - g\big(h(x)\big)$ eine Lösung der Differentialgleichung ergibt.

d) Die **Bernoullische Differentialgleichung** besitzt folgende Gestalt:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \qquad \text{mit } \alpha \geq 0.$$

Um welchen Differentialgleichungstyp handelt es sich? Unter welchen Umständen ergibt sich eine lineare Differentialgleichung?

e) Läßt sich die Bernoullische Differentialgleichung durch eine geschickte Transformation linearisieren?

## Aufgabe 5.2: Umschreiben auf System erster Ordnung (Pflicht)

Die folgenden Differntialgleichungen sind als Sytem erster Ordnung zu schreiben:

a) $\ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x$

b) $\ddot{x} = -y, \quad \ddot{y} = x$

c) $x^{(6)} = x$

## Aufgabe 5.3: Autonomisierung (Pflicht)

Transformieren Sie die folgenden Differentialgleichungen auf autonome Systeme erster Ordnung:

$$\text{i) } \ddot{x} + t\sin(t) = x \qquad \text{ii) } \ddot{x} = -\cos(t)x$$

**Hinweis:** Schreiben Sie zunächst eine Differentialgleichung in der Variablen $\mathbf{u}(t) = \binom{t}{x(t)}$.

## Aufgabe 5.4: Zur linearen Differentialgleichung

a) Leiten Sie eine Lösungsformel für die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y' = f(x)y + g(x) \qquad (*)$$

her. Lösen Sie zunächst die homogene Gleichung mittels *Separation der Variablen.* Die Lösung der inhomognen Gleichung kann mittels *Variation der Konstanten* gefunden werden. Darunter versteht man den Ansatz $y(x) = c(x)y_h(x)$, wobei $y_h$ eine Lösung der homogenen Gleichung darstellt und $c$ die durch Einsetzen zu bestimmende Koeffizientenfunktion.

b) Es seien $y_1 \neq y_2$ zwei verschiedene Lösungen von $(*)$. Zeigen Sie, daß $y_3$ genau dann Lösung ist, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \gamma.$$

c) Es sei $y : I \to \mathbb{R}$ die Lösung von $(*)$ mit $y(\xi) = \alpha$ für $\xi \in I$. Erfüllt die Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} u'(x) &\leq f(x)u(x) + g(x) \\ u(\xi) &= \alpha \end{aligned}$$

so beweise man für $x \in I$

$$u(x) \begin{cases} \geq y(x) & \text{für } x \leq \xi \\ \leq y(x) & \text{für } x \geq \xi \end{cases}.$$

d) Die Funktion $f$ sei auf $I$ nicht-negativ und es gelte für alle $\xi \leq x \in I$

$$u(x) \leq g(x) + \int_\xi^x f(t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bezeichnet $y$ die Lösung von

$$y'(x) = f(x)y(x) + f(x)g(x) \qquad \text{mit } y(\xi) = 0,$$

so zeige man die Abschätzung

$$u(x) \leq g(x) + y(x).$$