Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 05. Dez., WS 06/07
Abgabe : 13. Dez. bis 10 Uhr

Analysis III

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1: Mitreißender Phasenfluß– welcher Fluß kann schon rückwärts fließen! **(Pflicht)**

Es sei $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|F'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es wird das folgende Anfangswertproblem betrachtet:

$$\dot{x} = F(x), \quad x(\tau) = \xi \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, daß für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall $I(\xi, \tau)$ zu $(*)$ durch $\mathbb{R}$ gegeben ist.

b) Mit a) hat der Phasenfluß Φ zu $(*)$ die Definitionsmenge $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\Phi(t, \xi, \tau)$ nur von der Differenz $t - \tau$ abhängt.

Tip: Vergleichen Sie $\Phi(t, \xi, \tau)$ und $\Phi(t - \tau, \xi, 0)$ unter Ausnutzung der Eindeutigkeit von Lösungen.

c) Aufgrund von b) genügt es im autonomen Fall den Fluß mit Anfangswert $\tau = 0$ zu betrachten, den wir mit $\varphi_t(x) := \Phi(t, x, 0)$ für $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen. Zeigen Sie, daß φ_t invertierbar ist mit der Inversen φ_{-t}.

d) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Welche Differentialgleichung erfüllt die Jacobi-Determinante des Flusses φ_t also $W(t) := \det\big(J_{\varphi_t}(x)\big)$, wobei $J_{\varphi_t}(x)$ die Jacobi-Matrix von φ_t an der Stelle x ist?

Tip: Die Formel $\det{}'(A)BA = \det(A)\mathrm{trace}(B)$ für eine invertierbare Matrix A kann dabei sehr hilfreich sein. Es handelt sich dabei um einen Spezialfall der Formel für die Ableitung der Determinante der Matrix A

$$\det{}'(A)B = \mathrm{trace}(\hat{A}B), \qquad (**)$$

wobei $\hat{A}$ die sogenannte Adjunktenmatrix von A bezeichnet. Sie könnn sich gern am Beweis für $(**)$ versuchen.

Aufgabe 7.2: **(Pflicht)**

Eine Lokomotive der Masse m bewegt sich antriebslos unter dem Einfluß der Reibungskraft $f(v) = \alpha + \beta v^2$ auf einer waagerechten Schiene. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0.

a) Nach welcher Zeit kommt die Lokomotive zum Stillstand? Wie lange dauert es im Höchstfall ($v_0 \to \infty$)?

b) Welchen Weg hat sie dann zurückgelegt.

Betrachten Sie dazu die Differentialgleichung $m\ddot{x} = -f(\dot{x}) = -\alpha - \beta\dot{x}^2$, $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

Aufgabe 7.3: **(Pflicht)**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$m\ddot{z} = -mg - \beta\dot{z},$$

wobei m, β, g Konstanten sind.