Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 12. Dez., WS 06/07
Abgabe : 20. Dez. bis 10 Uhr

Analysis III

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1: Exakte Differentialgleichungen (Pflicht)

Gegeben sei die Gleichung

$$F\big(x, f(x)\big) = 0 \tag{1}$$

Durch Ableiten ergibt sich daraus eine Differentialgleichung erster Ordnung für f:

$$\partial_1 F\big(x, f(x)\big) + \partial_2 F\big(x, f(x)\big)\, f'(x) = 0 \tag{2}$$

Betrachten Sie nun die Differentialgleichung

$$P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)\, f'(x) = 0, \tag{3}$$

welche sich leicht lösen ließe, falls sie in die Form von (2) gebracht werden könnte. Dazu müßte eine Funktion F gefunden werden, welche den Bedingungen $\partial_1 F = P$ und $\partial_2 F = Q$ genügt. Ist diese Funktion gefunden, muß man die Gleichung (1) "nur" nach der zweiten Variablen von F auflösen. Falls eine derartige Funktion F existiert, nennt man die Differentialgleichung (3) *exakt*. Übrigens hätte man in (1) auch mit $F(g(y), y) = 0$ starten können. Wie sähe dann (2) aus?

Erinnern Sie sich noch an die Analysis II Vorlesung? Geben Sie ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Funktion F an, die $\partial_1 F = P$ und $\partial_2 F = Q$ erfüllt. Durch welche Zusatzbedingung läßt sich auch eine hinreichende Bedingung formulieren. Überprüfen Sie die folgenden DGLn auf Exaktheit und versuchen Sie sie im positiven Falle zu lösen.

a) $\big(\cos(y) + 2g(y)y\big)g'(y) + \big(g(y)^2 - y - g(y)\sin(y)\big) = 0$

b) $\frac{1}{y\sqrt{1-g(y)^2}}g'(y) - \frac{\arcsin(g(y))}{y^2} - \frac{y}{1-y^2} = 0$

c) $3x^2 + 2xf(x) + 1 + 2x^2 f(x)f'(x) = 0$

d) $3x^2 f(x)^2 + 2f(x) - 1 + \big(2x^3 f(x) + 2x + 2f(x)\big)f'(x) = 0$ (freiwillig)

Aufgabe 8.2: Abstraktes ganz Konkret (Pflicht)

Wenn es in der Vorlesung (zu) abstrakt wird, dann hilft nur die Konkretisierung durch ein (am besten selbstgebasteltes) Beispiel, etwa so:

$$\dot{x}(t) = \lambda t x^2(t), \qquad x(\tau) = \xi. \qquad (*)$$

a) Definieren Sie zu der skalaren Differentialgleichung (*) die rechte Seite F und geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge der Form $J \times D \times \Lambda$ an. Ist F lokal Lipschitz-stetig?

b) Bestimmen Sie die Abbildung Φ. Beachten Sie, daß $\Phi(t, \xi, \tau, \lambda)$ nichts anderes ist, als die Lösung von (*) zum Zeitpunkt t.

c) Ermitteln Sie die Definitionsmenge der in b) gefundenen Lösung für $t \mapsto x(t)$. Das Teilintervall, das den Startzeitpunkt τ enthält, ist das maximale Existenzintervall $J(\xi, \tau, \lambda)$ zum Problem (*). Wieso? Geben Sie die Definitionsmenge $\mathcal{D}$ von Φ an.

d) Formulieren Sie die Anfangswertprobleme, die die Ableitungen von Φ nach ξ, τ und λ erfüllen. Zeigen Sie durch direktes Ableiten von Φ nach λ und Einsetzen, daß die Ableitungen Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems sind. Wenn Sie möchten können Sie dies auch für die übrigen Ableitungen durchführen.