Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 17. Jan., WS 06/07
Abgabe : 24. Jan. bis 10 Uhr

Analysis III

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1: Italienisch für Mathematiker **(Pflicht)**

Das folgende Lehrgedicht stammt aus der 1572 erschienenen *L'Algebra* des italienischen Rechenmeisters Bombelli. Übersetzen Sie jede Zeile in eine mathematische Gleichung.

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa più di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più di meno fa meno,
Più di meno via meno di meno fa più,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Übersetzungshilfen: *più* = +1, *meno*=−1, *più di meno* = i, *meno di meno* = −i, *via* = (hier) mal, *fa* von *fare* = machen, (hier) gleich sein

Aufgabe 11.2: Komplex differenzierbar? **(Pflicht)**

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit:

$$f(z) = \bar{z}^3 z^4 + \bar{z}^4 z^3, \qquad g(z) = \cosh(z)\exp(\mathrm{i}z) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{i}\bar{z})\exp(z).$$

Aufgabe 11.3: Die "langweilige Seite" holomorpher Funktionen **(Pflicht)**

In der Vorlesung war bereits die Rede von den famosen Eigenschaften komplex-differenzierbarer (holomorpher) Funktionen: So impliziert einmal differenzierbar gleich beleibig oft differenzierbar und die lokale Darstellbarkeit als Potenzreihe (Konvergenz der Taylorreihe) ist ebenfalls gesichert. Dies verdeutlicht allerdings auch, daß komplexe Differenzierbarkeit eine sehr harte Forderung sein muß, welche bei weitem nicht von jedem glatten ebenen Vektorfeld erfüllt werden kann. Stellt man die "falsche" Zusatzbedingung landet man schnell in der leeren Menge (abgesehen von den langweiligen, konstanten Funktionen). Für gewisse Beweisschlüsse können diese Eigenschaften jedoch auch sehr nützlich sein.

Es sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das heißt offen und zusammenhängend. $H(G)$ bezeichne die Menge aller komplex differenzierbaren Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für $f \in H(G)$:

a) $f(G) \subset \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant.

b) $f(G) \subset S_1(0) \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant. ($S_1(0)$ bezeichnet die Einheitskreislinie!)

c) $\Re(f)$ und $\Im(f)$ seien linear abhängig $\quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant.

Aufgabe 11.4: Kubische Gleichungen und Cardanische Formeln **(Vorteil, Pflicht LA)**

Das Auflösen quadratischer Gleichungen (Bestimmung von Nullstellen quadratischer Polynome) war bereits ansatzweise in der Antike bekannt und wird im Mittelalter (neuntes Jahrhundert) ausführlich von dem arabischen Mathematiker *Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî* (daher Algorithmus) in seinem Werk *Al-jabr w'al muqâbala* (daher Algebra) behandelt.
Dagegen blieb das Auflösen kubischer Gleichungen der Neuzeit (16. Jahrhundert) vorbehalten und es zählt wohl zu den ersten mathematischen Großtaten, die eine stürmische Weiterentwicklung in den folgenden Jahrhunderten einleitete und auch an der Einfüfrung/Entdeckung komplexer Zahlen einen gebührenden Anteil hat. Es ist bis heute nicht ganz klar, wer als erster die allgemeine kubische Gleichunge zu lösen vermochte, da mehrere italienische Renaissance-Mathematiker daran beteiligt gewesen sind. Jedenfalls veröffentlichte der Arzt und Naturforscher Geronimo (auch Gerolamo) Cardano die Lösungsmethode als erster wie damals üblich in einem Lehrgedicht (*Ars magna sive de regulis algebraicis* – Die große (Rechen-)Kunst oder über die algebraischen Regeln). Daraufhin entbrannte ein langjähriger Streit mit seinem Rivalen Niccolo Fontana, auch Tartaglia genannt, der die Lösungsformeln für sich beanspruchte und sie weiterhin als geheimes Wissen dazu nutzen wollte, Rechenwettbewrebe zu gewinnen. Als eigentlicher Entdecker gilt heute allerdings ein gewisser Scipione del Ferro. Als Lösungsformel für kubische Gleichungen wird oft die folgende Formel angegeben:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}}$$

a) Zeigen Sie, daß jedes normierte kubische Polynom $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ durch eine affin-lineare Variablen-Transformation auf die reduzierte Form

$$R(z) = z^3 + rz + s$$

gebracht werden kann.

b) Schreiben Sie z als Summe zweier Unbekannter $z = u + v$. Setzen Sie diesen Ansatz in die reduzierte Form ein und leiten Sie quadratische Gleichungen für u^3 bzw. v^3 her, wobei eine geeignete Zusatzbedingung an u, v zu stellen ist.

c) Untersuchen Sie insbesondere kubische Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Welche Fallunterscheidungen sind ggf. durchzuführen. Können sich in der obigen Lösungsformel komplex-wertige Radikanden ergeben? Wie ist dann zu verfahren? Wie berechnet man alle Lösungen?

Aufgabe 11.5: Lineare DGL mit variabler Koeffizientenmatrix – Dyson Formel (Vorteil & WAVE)

Die folgende Aufgabe eignet sich hervorragend zur Wiederholung der in der Analysis III Vorlesung bisher behandelten Themengebiete (Integration im $\mathbb{R}^n$ & Differentialgleichungen). Das "Tolle" an der Aufgabe ist, daß sie keine "künstlich(e,) langweilige" Übungsaufgabe darstellt sondern einen relevanten physikalischen Hintergrund besitzt (somit besteht auch die Möglichkeit eines Lerngewinns jenseits der Mathematik!), den man aber zum erfolgreichen Lösen der Aufgabe keineswegs zu kennen braucht. An dieser Stelle sei Oliver Schlotterer für den Vorschlag der Aufgabe gedankt.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

mit $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und zeitabhängiger Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es soll gezeigt werden, daß die Lösungsformel $\mathbf{x}(t) = \exp(tB)\mathbf{x}_0$ des entsprechenden Problems mit konstanter Matrix B im allgemeinen nicht in direkter Weise analog zum eindimensionalen Fall

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

verallgemeinert werden kann.

a) Leiten Sie die folgende Formel her:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t A(s)\ \mathrm{d}s\ \mathbf{x}_0 + \int_0^t\int_0^s A(s)A(s')\ \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s\ \mathbf{x}_0 + \int_0^t\int_0^s\int_0^{s'} A(s)A(s')A(s'')\mathbf{x}(s'')\ \mathrm{d}s''\ \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s.$$

Tip: Formulieren Sie $(*)$ als Integralgleichung und setzen Sie diese wiederholt in sich selbst ein.

b) Verifizieren Sie die Formel

$$\int_0^t\int_0^s 1\ \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s.$$

Unter welchen besonderen Umständen gilt die folgende Gleichung?

$$\int_0^t\int_0^s A(s)A(s')\ \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t A(s)A(s')\ \mathrm{d}s'\ \mathrm{d}s \qquad (**)$$

Retten Sie $(**)$ für den allgemeinen Fall mit Hilfe eines *"Zeitordnungsoperators"* $\mathcal{T}$, welcher das Produkt zweier zeitabhängiger Matrizen in folgender Weise umordnet:

$$\mathcal{T}\big(A(t_1)A(t_2)\big) \quad := \quad \begin{cases} A(t_1)A(t_2) & : \ t_2 \le t_1 \\ A(t_2)A(t_1) & : \ t_1 < t_2 \end{cases}$$

Dieses Notationshilfsmittel $\mathcal{T}$ kann auch auf (endliche) Produkte beliebig vieler Matrizen $\mathcal{T}\big(\prod_i A(t_i)\big)$ angewendet werden, wobei die Matrizen $A(t_i)$ in der Auswertung (von links nach rechts) absteigend bezüglich der Auswertungszeitpunkte t_i anzuordnen sind. Soll $\mathcal{T}$ auf eine Summe von Matrixprodukten wirken, so ist $\mathcal{T}$ einem linearen Operator gleich auf jedes Produkt allein anzuwenden und anschließend zu summieren.

Tip: Eine Skizze der zweidimensionalen Integrationsgebiete kann helfen.

c) Leiten Sie daraus die folgende formale Lösungsformel zum Problem $(*)$ ab:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}\left[\exp\left(\int_0^t A(s)\ \mathrm{d}s\right)\right]\mathbf{x}_0$$

Es darf angenommen werden, daß die Überlegungen aus dem Teil b) auch in höheren Ordnungen in $A(t)$ funktionieren.

Hintergrund: Mit Hilfe gewisser Lemmata zur zeitgeordneten Exponentialfunktion ist diese sogenannte *Formel von Dyson* die Grundlage der Feynman-Diagramme der Quantenfeldtheorie.