Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 24. Jan., WS 06/07
Abgabe : 31. Jan. bis 10 Uhr

Analysis III

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1: Fragen aus der Vorlesung genau klären (Pflicht)

Während der Vorlesung vom letzten Freitag (19.Januar) ergaben sich etliche Fragen zu den Wegintegralen im Komplexen. Eine Frage im Zusammenhang mit dem Integrabilitätskriterium lautete dem Sinn nach:

> Wenn wir beweisen wollen, daß sich ein Wegintegral mittels einer Stammfunktion auswerten läßt, dann dürfen wir diese doch nicht benutzen, um im Beweis auftretende Integrale der Art
>
> $$\int_{[c,z]} f(c)\mathrm{d}\zeta,$$
>
> damit zu berechnen, oder?

Diese Frage wiederholte sich kontextgemäß beim Beweis des Goursatschen Lemmas:

> Wenn wir beweisen wollen, daß das Integral holomorpher Funktionen über Dreiecksränder verschwindet dann dürfen wir diese Aussage doch nicht im Beweis zur Anwendung bringen, um das Verschwinden der beiden folgenden Integrale
>
> $$\int_{\partial\Delta} 1 \, \mathrm{d}z \qquad \int_{\partial\Delta} (c-z) \, \mathrm{d}z$$
>
> zu begründen, nicht wahr?

Wie aber soll man die Integrale berechnen, wenn man die nützlichen Sätze nicht heranziehen darf?

Nun ja, wenn's keinen komfortableren Weg gibt, dann durch Rückgriff auf die Definition. Zum Glück sehen die Integranden ganz harmlos aus und mittels einer Parametrisierung läßt sich jedes Kurvenintegral in ein Integral über ein reelles Intervall verwandeln – und hier dürfen wir der Bequemlichkeit und Schnelligkeit halber sogar den Hauptsatz anwenden.

Berechnen Sie die obigen Integrale sorgfältig unter genauer Angabe der jeweiligen Weg-Parametrisierung. Überzeugen Sie sich davon, daß Ihnen in der Vorlesung kein Ringschluß untergejubelt wurde.

Aufgabe 12.2: Kritisches Durchleuchten des Beweises zum Integrallemma von Goursat (Pflicht)

a) In der Vorlesung wurde das Integrallemma von Goursat für Dreieckswege formuliert, welche eine besondere Klasse von geschlossenen Wegen darstellen. Ist man auf die Dreieckswege angewiesen oder könnte man auch andere Spezialklassen geschlossener Wege betrachten (z.B. Kreise, Vierecke etc.). Welchen Vorteil bieten Dreickswege im Hinblick auf den Integralsatz von Cauchy?

b) Im Beweis wurde lediglich benutzt, daß die Integrandenfunktion $f : D \to \mathbb{C}$ in einem Punkt c mit $\{c\} = \cap_n \Delta_n$ komplex differenzierbar ist. Es hat daher den Anschein, als ob man die Voraussetzung der Holomorphie von f in D lockern könnte? Untersuchen Sie das Lemma diesbezüglich auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten.

c) **(Brainstorming/Diskussionsaufgabe für LA)** Der Beweis des Integrallemmas wurde Ihnen in der Vorlesung besonders strukturiert vorgetragen, so daß die einzelnen Bausteine klar hervortreten, welche im letzten Schritt zur entscheidenden Schlußfolgerung zusammengesetzt werden. Möglicherweise ist dabei die Intuition zu kurz gekommen. Suchen Sie nach Möglichkeiten eines intuitiveren Zugangs bzw. einer natürlicheren Darstellung.

   Bemerkung: Oftmals werden bei der Präsentation eines Beweises zunächst scheinbar motivationslos Fakten gesammelt, die im letzten Schritt zusammengestzt werden und dann "erstaunlicherweise" und "oh Wunder" zum Beweis der Behauptung führen. Diese Darstellung mag die Nachprüfbarkeit eines Beweises erleichtern, ist aber didaktisch ungeschickt, da nicht ersichtlich wird, welche Ideen und Gedanken zu dem Beweis geführt haben. Ihre Aufgabe besteht darin, dieses Manko ggf. zu beseitigen.

Aufgabe 12.3: Reelle Deutung des Integralsatzes von Cauchy **(Pflicht)**

Das Wegintegral in der Zahlenebene ist eine komplexe Zahl, welche wie jede andere komplexe Zahl einen Real- und Imaginärteil besitzt. Geben Sie für diese möglichst explizite Formeln an. Stellen Sie den Integranden dabei in der folgenden Form dar $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Erkennen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Cauchyschen Integralsatz einerseits und dem dem Gaußschen bzw. Stokesschen Integralsatz andererseits? (siehe Aufgabe 4.2)

Aufgabe 12.4: Die seltsame Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ **(Vorteil)**

a) Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $f(z) = z^{-1}$ entlang einer geschlossenen Kurve, in deren Innern sich der Ursprung befindet (z.B. Polygonzug oder Kreis welcher **nicht** um den Nullpunkt zentriert ist.)

b) Wählen Sie nun die Kurve so, daß der Nullpunkt in ihrem Äußeren liegt und führen Sie die Integration nochmals durch. Wie erklären Sie sich das Ergebnis?

c) Geben Sie ein maximales Sterngebiet an, in dem f holomorph ist. Wie könnte eine Stammfunktion aussehen?

d) Verifizieren Sie die Gleichung für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$:

$$\int_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log r + \mathrm{i}\phi$$

Welche $z \in \mathbb{C}$ sind hier nicht zulässig?