Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 06. Dez., WS 06/07
Analysis III, Sonderblatt

Parabeln im Advent

Es ist der zweite Adventssonntag. Während die Sonne in den Baumwipfeln am Horizont versinkt und den Himmel in ein feuriges Glutrot taucht, hat es sich Frau Niggeborn in ihrem Wohnzimmer gemütlich gemacht. Endlich hat die zweifache Mutter – von Beruf Mathematiklehrerin – ein paar verdiente Mußestunden gefunden, ehe sie wieder in den Alltagstrubel der kommenden Woche eintauchen muß.

Ihr neues Buch "Anthologie sozialkritischer *Parabeln*" eines bekannten Essayisten hat sie bereits auf dem Schoße aufgeschlagen; doch sie kann dem Duft des frisch aufgebrühten Kaffees nicht widerstehen. Noch einmal rührt sie ihn kräftig mit dem Löffel um, bevor sie die dampfende Tasse langsam zu den Lippen führt. Ihr Blick fällt auf ein paar vereinzelte Schaumblasen, welche – langsamer werdend – auf kreisförmigen Bahnen tanzen. Deutlich erkennt sie die allmählich abflachende Wölbung der Flüssigkeitsoberfläche.

Unwillkürlich muß sie an ein Erlebnis aus der Studienzeit zurückdenken. Noch schlaftrunken von der Party des Vorabends war sie verspätet in den Hörsaal geschlichen und hatte ihre Thermoskanne aus dem Rucksack gekramt. Was hatte damals der alte Analysis Professor zu ihr gesagt, als er ihrer gewahr wurde: Wenn sie dem Kaffeegenuß unbedingt in der Vorlesung frönen müsse, sollte sie wenigstens wissen, welche Gestalt die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit annimmt. Sie hatte es nachrechnen sollen, aber es war ihr nicht gelungen. Der Tip des Professors von idealisierenden Annahmen auszugehen hatte mehr verwirrt als genützt und auch ihre KommilitonInnen hatten – selbst ratlos – nicht vermocht, ihr zu helfen.

Grübelnd schweift ihr Blick durch den Raum. Die beiden Kerzen des Adventskranzes und das gedämpfte Licht des Deckenfluters verleihen dem Zimmer samt der gediegenen Einrichtung eine äußerst behagliche Atmosphäre. Auf einmal bleibt ihr Blick an der Wand haften. Ähnelt die durch den Lichtfluter erzeugte Schattengrenze nicht einer makellosen Parabel? Vorsichtig kippt sie den Lampenkelch, um zu sehen, wie sich die Kurve an der Wand verändert.

Das Geräusch eines dumpfen Aufpralls reißt sie aus ihrem Experiment. Schnell eilt sie ans Fenster und erkennt die Spuren eines Schneeballs an der Scheibe. Die Kinder der Nachbarschaft scheinen sich des Neuschnees vom Vorabend prächtig zu erfreuen, denn eine heiße Schneeballschlacht tobt auf der Straße. Mehrmals verfolgt sie die Flugbahnen der durch die klirrende Kälte sausenden Kugeln. Wenn das nicht auch Parabeln sind! Dann erblickt sie in der Ferne die sich vor dem verblassenden Abendrot abzeichnende Silhouette der Hochspannungsleitung. Die durchhängenden Kabel sind jetzt weniger schlaff gespannt als im Sommer. Etwa auch Parabeln? Und was ist mit der Kette vor der Garageneinfahrt und der Weihnachtsgirlande, die sie gestern aufgehängt hat. Auch die kleine Fontäne des jetzt abgestellten Springbrunnens im Vorgarten kommt ihr in den Sinn.

Sie ist begeistert von der Vorstellung, überall immer wieder denselben Kurventyp zu erblicken. In der nächsten Woche muß sie mit ihrer neunten Klasse das leidige und schwierige Thema Parabeln und quadratische Gleichungen endlich in Angriff nehmen, da wird es ihr an Anschauungs- und Motivationsbeispielen wohl kaum fehlen. Doch mißtraut sie sich ein wenig. Soviele Parabeln auf einmal, das scheint fast zu viel. Auf jeden Fall wird sie die neue Referendarin konsultieren – die kommt frisch von der Uni und sollte sich damit noch besser auskennen als sie.

Plötzlich wendet sich ihre Aufmerksamkeit erneut der Schneeballschlacht zu. Einige der Schneebälle kommen jetzt von oben. Im Halbdunkel erkennt sie Max und Moritz, die aufs Garagendach geklettert sind, um ihre Kameraden von erhöhter Warte besser zu treffen. Diese haben aber offenbar eine Gegenattacke gestartet. Ein wahrhafter Schneeballschauer prasselt auf das runde Blech der Fernsehantenne, hinter der sich ihre beiden Buben verschanzt halten. "So ein Mist, genau in der entscheidenden Szene bleibt das Bild weg", tönt es ärgerlich aus dem Nebenzimmer. "Dabei ist die Antenne doch erst neulich auf dem Garagendach justiert worden!" Offenbar hatte ihr Mann, ein passionierter Latein- und Griechischlehrer, der Versuchung nachgegeben, die Sportschau einzuschalten. "Schatz, beruhige dich, ich weiß, woran es liegt. Verrate mir nur, woher das Wort *Parabel* stammt und was es bedeutet, dann sage ich dir, wie der Ball geflogen ist.".

Die Aufgabe besteht nun darin, in die Rolle der Referendarin zu schlüpfen und alles Parabolische und vermeintlich Parabolische in der obigen Geschichte aufzudecken (inklusive stichhaltiger Begründungen). Wem diese Aufgabe zu schwammig und unspezifisch ist, der findet auf der Rückseite eine genauere Anleitung.

0) Die erste Aufgabe ist weniger mathematischer Natur. Es geht darum, die Herkunft und Bedeutung des Wortes *Parabel* zu klären. Insbesondere kann man sich die Frage stellen, was die literarische Gattung der Parabel mit der Parabel als Kurve gemeinsam hat. Weiterführend könnten die Begriffe der *Ellipse* und *Hyperbel* geklärt werden. Gibt es hier ebenfalls außerhalb der Mathematik eine Bedeutung?

a) Der nächste Punkt betrifft den Kaffee in der Tasse. Hier ist folgender Sachverhalt zu beweisen: Die freie Oberfläche einer *idealen* Flüssigkeit (d.h. ohne innere Reibung und ohne Reibung an den Wänden), deren Geschwindigkeitsfeld durch $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}$ (starre Rotation) gegeben ist, entspricht einem Rotationsparaboloiden. Die Lösung dieser Aufgabe setzt ein wenig physikalische Intuition voraus. Dazu betrachtet man ein winziges, imaginäres Teilchen (Plättchen), welches an der Oberfläche treibt und mit der Strömung rotiert (gleiche Geschwindigkeit wie die umgebende Flüssigkeit).

   Um die Oberfläche des rotierenden Kaffees zu berechnen, muß man eine Differentialgleichung für $h(r)$ finden, wobei $h(r)$ die Höhe des Kaffees über dem Tassenboden im Abstand r von der Drehachse angibt. (Es stellt sich heraus, daß die gesuchte Differentialgleichung von sehr schlichter Bauart ist.) Physik kommt im wesentlichen nur an der Stelle ins Spiel, wo man sich überlegt, wie der Druck der Flüssigkeit auf das winzige Teilchen wirkt, das mit der Flüssigkeit rotiert. Es wird angenommen, daß der Druck nur eine Kraft $P\mathbf{n}$ normal zur Oberfläche ausüben kann. Getreu der Vorlesung ergibt sich folgende Kräftebilanz unter Berücksichtigung der Schwerkraft:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -mg\mathbf{e}_3 + P\mathbf{n}.$$

   $\ddot{\mathbf{x}}$ ist dabei die zweifache Zeitableitung der Teilchentrajektorie (Beschleunigung), welche aus der gleichmäßig durchlaufenen, kreisförmigen Bahn zu berechnen ist.

b) Als nächstes ist die Schattenlinie an der Wand zu untersuchen. Warum handelt es sich es sich im wahrsten Sinne des Wortes um einen Kegelschnitt? Welche leicht idealisierenden Annahmen werden dabei vorausgesetzt? Welche Kurven ergeben sich aus Kegelschnitten? Unter welchen Voraussetzungen kann sich tatsächlich eine Parabel ergeben?

c) Sieht man von der Luftreibung ab, so läßt sich die Flugbahn von Bällen (gleich ob Schneeball, Fußball oder Wasserfontäne), Geschossen und ähnlichen Flugobjekten im erdnahen homogenen Schwerefeld durch Parabeln beschreiben. Wie Kraft und Beschleunigung zusammenhängen, wurde in der Vorlesung kurz erklärt; und daß die Gravitationskraft nach unten wirkt ($-mg\mathbf{e}_3$), dürfte wohl auch niemandes Lebenserfahrung entgangen sein. Die Flugbahn läßt sich durch Lösen des folgenden AWPs berechnen:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0,\ \ \ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{e}_3.$$

   Weiterführend ließe sich der Effekt von Luftreibung auf die Bahnkurve diskutieren. Dabei ist zunächst zu klären, durch was für einen zusätzlichen Term die Reibung in der Differentialgleichung zu berücksichtigen ist.

d) Die Vermutung, daß es sich bei hängenden Kabeln, Ketten etc. ebenfalls um Parabeln handelt, stimmt nicht. Unter sinnvollen, vereinfachenden Annahmen ist zunächst wieder eine Differentialgleichung herzuleiten und anschließend zu lösen. Hierzu sei z.B. auf das Lehrbuch von Heuser verwiesen.

e) Zuletzt ist die Fernsehantenne zu beachten, bei der es sich um eine Parabolantenne handeln soll. Die fokussierende Wirkung eines Parabolspiegels auf parallele Strahlenbündel wurde bereits in einer Übungsaufgabe zur Analysis II Vorlesung thematisiert.

f) (*Ergänzung)*

   Zum Ausgleich für die übermäßig sportliche Betätigung lernen Max und Moritz jetzt zu jedem Adventssonntag eine Strophe des Weihnachtsliedes *Es ist ein Ros entsprungen aus einer Wurzel zart* auswendig, damit sie den Choral den Großeltern an Heilig Abend vorsingen können.

   (*Freistil)* Kombinieren Sie die Begriffe *Wurzel, Differentialgleichung* und *Parabel* auf eine sinnvolle Weise.

Zur Sinnfrage der Aufgabe: Zwar ist die Mathematik die Sprache der Natur (Galileo Galilei), aber es bedarf durchaus einiger Anstrengung, natürliche Prozesse mathematisch zu formulieren und eine konkrete Fragestellung in ein abstrakteres mathematisches Problem zu verwandeln. Diese sogenannte Modellierungsarbeit sollte auch einem Mathematiker vertraut sein, da Modellierung und Mathematik einander bedingen. Es macht daher keinen Sinn, eine künstliche Entkopplung einzuführen. Die Aufgabe bietet die Möglichkeit, dies ansatzweise zu üben. Sie soll ein klein wenig dazu beitragen, mathematische Abstraktionen in unserer direkten Umwelt wahrzunehmen.