Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 29.10.2010

Abgabe: 05.11.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 02

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.8 aus der Vorlesung, indem Sie die Aussagen (I)-(II) und (IV)-(VII) beweisen.
(Auf der Homepage finden Sie Satz 1.8 als pdf-Download. Zum Download gelangen Sie ausgehend von `http://www.math.uni-konstanz.de/numerik` entweder über Michael Junk oder Johannes Budday, über Lehre zu Analysis 1)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Mengen induktiv sind:

(a) $M = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$

(b) $M = \{q \in \mathbb{N} \mid x^p x^q = x^{p+q}\}$ für ein festes $x \in \mathbb{R}$ und ein festes $p \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3

Spiegelt man eine komplexe Zahl $z = x + iy$ in der Gaußschen Zahlenebene an der Realachse, so bezeichnet man die gespiegelte Zahl $\overline{z} = x - iy$ als die zu z *komplex konjugierte* Zahl. Beweisen Sie damit die folgenden Rechenregeln:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(c) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$

(d) $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$

(e) $\mathrm{Im}(z \cdot \overline{z}) = 0$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$

Aufgabe 4

(a) Eine komplexe Zahl z kann in der Gaußschen Zahlenebene als Vektor aufgefasst werden. Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Schulwissens eine Formel für die "Länge" $|z|$ einer komplexen Zahl z in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$.

Der Abstand d zweier komplexen Zahlen u, v wird über die Länge des Differenzenvektors angegeben, d.h. es gilt $d(u, v) := |u - v|$.

(b) Zeigen Sie, dass d für beliebige $u, v, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $d(u, v) \geq 0$ und $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ "Definitheit"
(ii) $d(u, v) = d(v, u)$ "Symmetrie"
(iii) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ "Dreiecksungleichung"

- bitte wenden -

Zeichnen wir eine komplexe Zahl als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene, so ist diese Zahl eindeutig durch ein Tupel (r, φ) identifizierbar. Dabei steht r für die Länge des Vektors und φ für den Winkel, den dieser Vektor mit der Realachse einschließt.

(c) Bestimmen Sie unter Ausnutzung Ihres Schulwissens die Darstellung einer komplexen Zahl z in Abhängigkeit des Tupels (r, φ) und überprüfen Sie mit Ihrer Formel aus (a) unter Verwendung der Additionstheoreme, ob $|z| = r$ gilt.

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$ und $z_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}(1 + 2i)$.

(d) Bestimmen Sie $|z_1|$, $|z_2|$ und $|z_1 \cdot z_2|$ und verwenden Sie diese Ergebnisse, um die Zahlen z_1, z_2 und $z_1 \cdot z_2$ als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene zu zeichnen. Formulieren Sie anhand Ihrer Zeichnung eine Vermutung über die Abhängigkeit der Länge und des Winkels von $z_1 \cdot z_2$ von den Tupeln (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2).

(e) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der Darstellung aus (c) unter Verwendung der Additionstheoreme. Gibt es eine einfachere Methode, um Ihre Vermutung über die Länge von $z_1 \cdot z_2$ zu beweisen?