Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 05.11.2010

Abgabe: 12.11.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 03

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ zwischen zwei unterschiedlichen Zahlen x, y stets eine weitere Zahl u existiert, d.h. dass gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : \; x < y \;\Rightarrow\; \exists u \in \mathbb{K} : \; x < u < y$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \; \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \; \sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

(c) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$

(d) Für die Glieder der Fibonacci-Folge $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ gilt:

(i) $1 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2}$
(ii) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
(iii) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$

Aufgabe 3

Kommentieren Sie den Beweis zu folgendem **Satz**: Alle Pferde haben dieselbe Farbe
Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)
Induktionsanfang: Es ist offensichtlich, dass in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.
Induktionsschritt: Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, da bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n+1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die aufgrund der Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen. Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. $\square$

Aufgabe 4

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt und

$$A + B := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \text{ für ein } a \in A \text{ und ein } b \in B\}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$