Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 19.11.2010

Abgabe: 26.11.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 05

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + 3x$, deren mit der x-Achse eingeschlossene Fläche A approximiert werden soll. Stellen Sie dazu eine Folge (a_n) auf, deren einzelne Folgenglieder a_n die Fläche beschreiben, welche der die Funktion f approximierende Polygonzug mit n Teilintervallen mit der x-Achse einschließt. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge (a_n) für $n \to \infty$?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen (Hinweis: Bearbeiten Sie zuerst Aufgabe 5):

(a) $(a_n) = \left(\frac{5n^2-3n-1}{2n^2+1}\right)$

(b) $(b_n) = \left(\frac{n^2-2}{n^3-n+1}\right)$

(c) $(c_n) = \left((\frac{1}{n}+2)\frac{3n^2-1}{n+1}\right)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie Lemma 5.4 aus der Vorlesung
(Auf der Vorlesungs-Homepage finden Sie Lemma 5.4 als pdf-Download)

Aufgabe 4

Es seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(c_n) = (a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 5

Eine Folge (a_n) mit der Eigenschaft, dass für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > K$ für alle $n \geq N$ bezeichnet man als *bestimmt divergent* (in Symbolen: $\lim a_n = \infty$). Entsprechend definiert man $\lim a_n = -\infty$, wenn jede reelle Zahl K ab einem gewissen Index unterschritten wird. Zeigen Sie folgende Aussagen für das Rechnen mit Grenzwerten bestimmt divergenter Folgen:

(a) Sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft $\lim a_n = \infty$, dann gilt $\lim ca_n = \infty$ für $c > 0$ bzw. $\lim ca_n = -\infty$ für $c < 0$.

(b) Sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft $\lim a_n = \infty$ und (b_n) eine beschränkte Folge, dann gilt $\lim a_n + b_n = \infty$.

(c) Sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft $\lim a_n = \infty$ und (b_n) eine Folge mit $b_n \geq c$ ab einem gewissen Index für ein festes $c > 0$, dann gilt $\lim a_n \cdot b_n = \infty$.

(d) Sei (a_n) eine Nullfolge. Wie divergiert dann die Folge $(\frac{1}{a_n})$?