Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 26.11.2010

Abgabe: 03.12.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 06

Aufgabe 1

Wir definieren $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $c \in \overline{\mathbb{R}}$ existieren reelle Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim a_n = \infty$ bzw. $\lim b_n = -\infty$ und der Eigenschaft $c = \lim(a_n + b_n)$.

(b) Zu jedem $c \in \overline{\mathbb{R}}$ existieren reelle Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim a_n = \infty$ bzw. $\lim b_n = 0$ und der Eigenschaft $c = \lim(a_n \cdot b_n)$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ **(b)** $\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+10}{2^n n^5}$ **(e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **(f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3n^4-4n+3}$

Aufgabe 3

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $M_k : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),\ x \longmapsto x^k$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass M_k für alle $k \in \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist, d.h. dass gilt: $x < y \ \Rightarrow\ M_k(x) < M_k(y)$

(b) Zeigen Sie, dass streng monoton wachsende Funktionen injektiv sind.

(c) Zeigen Sie die Surjektivität von M_k nach dem selben Prinzip, wie in der Vorlesung bereits die Gleichung $x^2 = 2$ behandelt wurde.

(d) Berechnen Sie $M_k^{-1}(x^k)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

(a) Eine monotone Folge mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent.

(b) Eine monotone Folge mit einer divergenten Teilfolge ist divergent.

Aufgabe 5

Überprüfen Sie, ob Sie bei Ihren Lösungen zu den Aufgaben 1-4 an jeder Stelle, an welcher Sie durch Berufung auf eine Definition oder einen Satz eine Folgerung ziehen, alle notwendigen Voraussetzungen der Definition bzw. des Satzes abgeklärt haben. Formulieren Sie diese jeweils aus, so dass immer klar ersichtlich ist, auf welche mathematische Aussage Bezug genommen wird. Dabei werden Sie feststellen, dass nicht alle Folgerungen, die Sie auf einem Übungsblatt oft voreilig ziehen, von Richtigkeit bzw. nachvollziehbar sind.