Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 03.12.2010

Abgabe: 10.12.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 07

Achten Sie bei Ihrer Lösung darauf, dass Sie an jeder Stelle, an welcher Sie durch Berufung auf eine Definition oder einen Satz eine Folgerung ziehen, alle notwendigen Voraussetzungen der Definition bzw. des Satzes abklären. Formulieren Sie diese jeweils aus, so dass immer klar ersichtlich ist, auf welche mathematische Aussage Bezug genommen wird. Geben Sie Ihre Lösungen erst dann ab, wenn jene genau diesen Prozess durchlaufen haben. Lösungen, bei denen nicht ersichtlich ist, was überhaupt zu beweisen ist (Voraussetzung, Behauptung, Beweis) bzw. aus welchen Voraussetzungen welche Schlüsse gezogen werden bzw. welchen Gedankenprozess Sie beim Aufschreiben Ihrer Lösung durchlaufen haben, werden **nicht** korrigiert.

Aufgabe 1

Lesen Sie den obigen Text sorgfältig durch und beachten Sie die Hinweise in den weiteren Aufgaben. Lesen Sie sich zu diesem Thema auch die hierfür neu gemachte Seite `http://wiki.math.uni-konstanz.de/Analysis/Fehlerdatenbank` durch.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{N}$, $x, y \geq 0$ gilt:
$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{pq}} \quad , \quad (xy)^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{p}}$$

(b) Ist es sinnvoll, für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ die Potenz x^r durch $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ zu definieren? (Beachten Sie, dass man $r = \frac{3}{2}$ auch als $r = \frac{21}{14} = \frac{-3\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$ schreiben kann!)

(c) Weisen Sie die Potenzgesetze für beliebige Bruchzahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ nach, d.h. dass für $x, y \geq 0$ gilt:
$$(x^r)^s = x^{rs} \quad , \quad (xy)^r = x^r y^r \quad , \quad x^{r+s} = x^r x^s$$

Aufgabe 3

(a) Es sei $C \in \mathbb{R}$ gegeben und (a_n) eine Folge, für deren Folgenglieder ab einem bestimmten Index $N \in \mathbb{N}$ $a_n \leq C$ gilt. Zeigen Sie, dass sich diese Eigenschaft auf den Limes-superior überträgt, d.h. dass auch $\limsup a_n \leq C$ gilt.

(b) Wie muss man die Aussage aus (a) abändern, damit man auch eine Aussage für die umgekehrte Richtung erzielen kann?

(c) Formulieren und beweisen Sie die Teilaufgaben (a) und (b) entsprechend für den Limes-inferior.

Aufgabe 4

(a) Für $u, v \in \mathbb{C}$ ist durch $|u| = \sqrt{u \cdot \overline{u}}$ die zugehörige "Länge" von u und durch $d(u,v) := |u - v|$ der Abstand von u und v gegeben (siehe Blatt 02). Eine komplexe Folge (a_n) heißt konvergent mit Grenzwert $A \in \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(a_n, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Zeigen Sie damit folgende Äquivalenz:

$$\lim a_n = A \in \mathbb{C} \;\Leftrightarrow\; \lim \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(A) \in \mathbb{R},\; \lim \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(A) \in \mathbb{R}$$

(b) Eine komplexe Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn ein $M \geq 0$ existiert mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist (a_n) konvergent, dann ist (a_n) beschränkt.

(c) Zeigen Sie, dass jede beschränkte komplexe Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$).

Aufgabe 5

(a) Konstruieren Sie eine unbeschränkte reelle Folge mit zwei Häufungswerten.

(b) Konstruieren Sie eine reelle Folge mit abzählbar-unendlich vielen Häufungswerten.

(c) Konstruieren Sie eine reelle Folge $x = (x_n)$, für die $\mathrm{HW}(x) = [0, 1]$ gilt.

(d) Bestimmen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge $(a_n) = \big((-1)^n(2 + \frac{3}{n})\big)$

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{HW}(a)$ der komplexen Folge $a = (a_n) = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \frac{n-i}{n}\right)$
(Hinweis: betrachten sie die Potenzen von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ etwas genauer unter Beachtung Ihrer Kenntnisse aus Aufgabe 4 von Blatt 02)