Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 10.12.2010

Abgabe: 17.12.2010
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 08

Der Hinweis zu Beginn des letzten Blattes ist selbstverständlich auch für die Bearbeitung dieses Blattes zu beachten!

Aufgabe 1

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a, b \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(b) Beweisen Sie die sogenannte Bernoulli-Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für} \quad x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c > 0$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ **(c)** $\limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{1}{n^2}|^{\frac{1}{n}} = 1$

(d) Ist $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$, dann gilt folgende Ungleichungskette:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

(e) das Quotientenkriterium.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass komplexe Cauchy-Folgen konvergent sind.

(b) Zeigen Sie, dass absolut konvergente komplexe Reihen konvergent sind.

(c) Für $z \in \mathbb{C}$ wird die komplexe Exponentialfunktion durch $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ definiert. Zeigen Sie, dass $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent ist und berechnen Sie für ein beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ den Realteil $\operatorname{Re}\big(\exp(i\varphi)\big)$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im}\big(\exp(i\varphi)\big)$.

(Hinweis: Die trigonometrischen Funktionen cos und sin sind durch $\cos\varphi := \operatorname{Re}\big(\exp(i\varphi)\big)$ bzw. $\sin\varphi := \operatorname{Im}\big(\exp(i\varphi)\big)$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert. Es gilt die sogenannte Euler-Formel $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Diese Darstellungen von cos und sin können ebenso auf komplexe Argumente erweitert werden)

(d) Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den Kosinus- und den Sinus-Hyperbolicus durch $\cosh(z) := \frac{1}{2}\big(\exp(z) + \exp(-z)\big)$ und $\sinh(z) := \frac{1}{2}\big(\exp(z) - \exp(-z)\big)$. Leiten Sie daraus einen Zusammenhang zwischen cos und cosh bzw. zwischen sin und sinh her.

Aufgabe 4

Lemma 8.4 besagt, dass eine Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, bereits selbst konvergent ist. Der Beweis dazu wurde in der Vorlesung behandelt und steht auf der Homepage nochmals als pdf zur Verfügung. Schreiben Sie diesen Beweis nochmals ab und finden Sie dabei jene Stellen, an denen Folgerungen oder Begründungen gemacht werden. Überlegen Sie sich warum diese Aussagen so Gültigkeit besitzen und formulieren Sie die ausgelassenen Zwischenschritte aus. Schreiben Sie den Beweis also so auf, dass er den Kriterien von

`http://wiki.math.uni-konstanz.de/Analysis/Fehlerdatenbank`

entspricht. Dabei ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

`http://wiki.math.uni-konstanz.de/Analysis/Fehlerdatenbank/Algorithmus`