Lemma 8.4. Hat eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie konvergent

Beweis: Sei (x_n) CF mit konvergenter Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ d.h. $x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit

$d(x_{m_k}, \bar{x}) < \varepsilon/2$ für $k \geq K$.

und $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$.

Wähle k mit $m_k \geq N$ und $k \geq K$ und sei $n \geq N$.

Dann ist $d(x_n, \bar{x}) \leq |x_n - x_{m_k}| + |x_{m_k} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ($n, m_k \geq N$, $k \geq K$) ▨

definiere $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/2$ mit Def 5.1. gibt es dazu $K \in \mathbb{N}$ so dass $d(x_{m_k}, \bar{x}) < \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ falls $k \geq K$.

definiere $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/2$ mit Def. der Cauchy-Folge gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$

Nulltrick und Δ's Ungleichung

wieso geht das? Nach Def. Teilfolge ist (m_k) streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Per Induktion zeigt man $m_k \geq k$ für alle k. Eine präzise Wahl wäre also z.B. $k = N$. bzw für späteres Argument $k = \max\{N, K\}$

Begründungen unter Ungleichungskette

Schlusssatz: Nach Def 5.1. ist (x_n) konvergent