Lemma 8.4. Hat eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie konvergent

Beweis: Sei (x_n) CF mit konvergenter Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ d.h. $x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \overline{x}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit

$d(x_{m_k}, \overline{x}) < \varepsilon/2$ für $k \geq K$.

und $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$.

Wähle k mit $m_k \geq N$ und sei $n \geq N$.

Dann ist $d(x_n, \overline{x}) \leq |x_n - x_{m_k}| + |x_{m_k} - \overline{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\blacksquare$