Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 17.12.2010

Abgabe: 14.01.2011
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 09

In der ersten Semesterwoche nach den Weihnachtsferien finden die Übungsgruppen planmäßig statt. Hier können Sie unter anderem Ihre Fragen loswerden, die bei der Aufarbeitung des Vorlesungsstoffes während der Ferien aufkommen! Wenn Sie das Nacharbeiten des Vorlesungsstoffes im Sinne der Aufgabe 4 von Blatt 8 bzw. der Aufgabe 1 dieses Blattes angehen, wird Ihnen das helfen, die erzielten Aussagen und Beweiskonzepte besser zu verstehen. Die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 8 finden Sie als Lernunterstützung als pdf-Download auf der Homepage.

Aufgabe 1

Verwandeln Sie die Beweisidee von Satz 8.6 in einen vollständigen Beweis.
(Auf der Homepage finden Sie Satz 8.6 inklusive Beweisidee als pdf zum Download)

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Konvergenzradius und -bereich folgender reeller Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(x-1)^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\,x^{2n-1}$

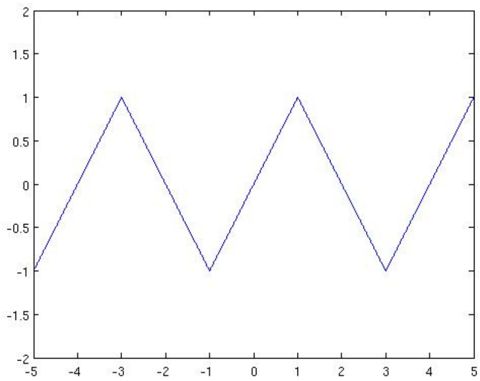
Aufgabe 3

Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

f ist stetig in $\overline{x} \in D \iff f\big|_{D\cap(-\infty,\overline{x}]}$ und $f\big|_{D\cap[\overline{x},\infty)}$ sind stetig in $\overline{x} \in D$

Aufgabe 4

Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzten Funktion f:



(a) Lesen Sie die Funktionsvorschrift aus der Grafik ab und untersuchen Sie, ob die Funktion f Lipschitz stetig, stetig oder unstetig ist.

(b) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \, , \; x \longmapsto \begin{cases} f(1/x) & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5

(a) Sei $E \subset \mathbb{R}$ mit $E \neq \emptyset$ und $\Phi : E \longrightarrow E$ stetig. Zeigen Sie folgende Aussage (Fixpunktiteration): Ist $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ konvergent, dann ist $\overline{x} := \lim x_n$ ein Fixpunkt von Φ (d.h. es gilt $\overline{x} = \Phi(\overline{x})$).

(b) Weisen Sie die Konvergenz der rekursiv definierten Folge

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad , \quad a_1 = 0$$

nach (Tipp: Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Beschränktheit) und bestimmen Sie unter Verwendung von (a) ihren Grenzwert.

Aufgabe 6: Weihnachtsaufgabe

Gegeben sei eine Menge B an Buntstiften und eine Bijektion $\varphi_1 : B \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq n}$ mit $n \geq 2$. Weiter bezeichne A die Menge aller abgeschlossenen Bildzellen des nachstehenden Bildes und φ_2 eine Abbildung von A nach $\mathbb{N}_{\leq n}$ mit $2 \leq |\varphi_2(A)| \leq n$. Führen Sie eine Möglichkeit für $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ durch. Die kreativsten Lösungsvorschläge werden nach Weihnachten prämiert. Die Bearbeitung der Aufgabe ist freiwillig.

Wir wünschen allen Studierenden frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins neue Jahr