Verwandeln Sie die Beweisidee von Satz 8.6 in einen vollständigen Beweis.

„$\Rightarrow$" sei $\sum a_n$ konvergent

d.h. nach Def ist (s_n) konvergent mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

nach Satz 8.5 ist (s_n) Cauchy-Folge.

Sei nun $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es (nach Def. CF) ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit

$|s_n - s_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq \tilde{N}$

Definiere $N := \tilde{N} + 1$.

Für $m \geq n \geq N$ gilt dann tatsächlich

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| = |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon, \text{ da } m, n-1 \geq \tilde{N}.$$

„$\Leftarrow$" Sei $\sum a_n$ Reihe die Cauchy-Kriterium erfüllt

d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

falls $m \geq n \geq N$.

Setze $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und wähle $i, j \geq N$

Fall $j \geq i+1$: $|s_j - s_i| = \left|\sum_{k=i+1}^{j} a_k\right| < \varepsilon$ da $j \geq i+1 \geq N$

Fall $i \geq j+1$: $|s_j - s_i| = \left|\sum_{k=j+1}^{i} a_k\right| < \varepsilon$ da $i \geq j+1 \geq N$

Fall $i = j$: $|s_j - s_i| = 0 < \varepsilon$

in jedem Fall (Gleichheit von $\{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid j, i \geq N\}$ und $\{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid j \geq i+1 \vee i \geq j+1 \vee i = j\}$ nachweisen)

gilt $|s_j - s_i| < \varepsilon$ wenn $i, j \geq N$. Damit ist (s_n) CF und nach Satz 8.5 konvergiert (s_n) also nach Def auch $\sum a_n$ $\blacksquare$