Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 14.01.2011

Abgabe: 21.01.2011
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 10

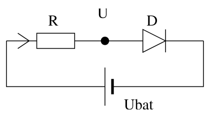
Aufgabe 1

Für $R > 0$, $\alpha = 2,29 \cdot 10^{-9}$ und $\beta = 22,6$ sei die Funktion $F(U) = R\alpha \exp(\beta U) + U$ gegeben.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung von Monotonie und dem Zwischenwertsatz, dass die Gleichung $F(U) = U_0$ für jedes $U_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Berechnen Sie im konkreten Fall $R = 1000$ und $U_0 = 2,5$ die Lösung U der Gleichung $F(U) = U_0$ mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens auf 2 Stellen genau.

Information: Der Term $I = \alpha \exp(\beta U)$ beschreibt die Strom-Spannungs-Kennlinie (IU-Kennlinie) einer Diode D. R bezeichnet den Widerstand und wird in Ohm $[\Omega]$ angegeben. Die Konstanten α bzw. $\frac{1}{\beta}$ werden in Ampere $[A]$ bzw. in Volt $[V]$ angegeben. Die Gleichung $F(U) = U_0$ beschreibt die Spannung U an einem Punkt zwischen Widerstand und Diode. U_0 steht für die angelegte Batteriespannung U_{bat}. Das folgende Schaltbild verdeutlicht obige Situation:



Aufgabe 2

Die Exponentialfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$. Beweisen Sie deren folgende Eigenschaften der Reihe nach unter Verwendung dieser Definition, der Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und den dann bereits bewiesenen Aussagen (d.h. zum Beweis von (b) darf (a) verwendet werden, sofern (a) bereits bewiesen wurde):

(a) $e := \exp(1) > 1$ und $\exp(0) = 1$

(b) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$

(d) Zu jedem $y > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$

Die Teilaufgaben (c) und (d) zeigen, dass die Exponentialfunktion eine Inverse besitzt, die auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert ist. Diese wird als natürlicher Logarithmus bezeichnet und mit ln abgekürzt. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(e) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$

(f) $\ln(1) = 0$

(g) $\ln(x) > 0$ für alle $x > 1$

(h) Für $x, y > 0$ mit $x < y$ gilt $\ln(x) < \ln(y)$

Allgemeine Potenzen:
Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus kann man für ein beliebiges $a > 0$ und ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Potenz a^x definieren:

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

(i) Beweisen Sie unter Verwendung dieser Definition, dass die Rechenregeln für das Potenzieren mit natürlichen Zahlen auch für beliebige reelle Potenzen erhalten bleiben, d.h. das für beliebige $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x \cdot y} = \big(a^x\big)^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ für $p \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{N}$

(j) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass folgende Aussage gilt:

$$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 12.4, indem Sie jeden der Beweisschritte mit nummerierten Definitionen oder Sätzen aus der Vorlesung mathematisch begründen.
(Auf der Homepage finden Sie Satz 12.4 inklusive Beweis als pdf zum Download)

Aufgabe 4

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(x)$ mit Hilfe von Satz 10.11 auf Stetigkeit. Ist ln gleichmäßig stetig?

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.