Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 21.01.2011

Abgabe: 28.01.2011
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 11

Aufgabe 1

Differenzieren Sie folgende Funktionen unter Verwendung des Differenzenquotienten oder der in der Vorlesung behandelten Differentiationsregeln:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto e^x$

(b) $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(x)$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x$ für ein $a > 0$

(d) $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x$

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{(x-2)^3 e^x - x3^x}{2x^2+1}$

(f) $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Aufgabe 2

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie für welche $n \in \mathbb{N}_0$ diese Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig bzw. differenzierbar ist. Überprüfen Sie im Falle der Differenzierbarkeit auch die Stetigkeit der Ableitung an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 3

Auf der Homepage finden Sie Satz 12.7 und den zugehörigen Beweis als pdf zum Download. Lesen Sie sowohl den Satz als auch den Beweis genau durch und bearbeiten danach folgende Aufgaben:

(a) Listen Sie die Voraussetzungen des Satzes auf.

(b) Formulieren Sie die Behauptung des Satzes.

(c) Drucken Sie sich den Beweis aus und vermerken darauf, welche Voraussetzung an welcher Stelle eingeht (wenn notwendig mit Erläuterung).

Aufgabe 4

Sei $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1\}$ die Menge im ersten Quadranten, die durch einen Ellipsenbogen begrenzt wird. Dieser Menge wird nun ein achsenparalleles Rechteck R einbeschrieben, für das $R \subseteq E$ gilt. Wie muss die rechte obere Ecke gewählt werden, damit das einbeschriebene Rechteck maximalen Flächeninhalt besitzt? Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte an, sowie den maximalen Flächeninhalt. Beweisen Sie die Optimalität.