Satz 12.7. Sei D ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f: D \to W$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}: W \to D$. Ist f in $\bar{x} \in D$ differenzierbar mit $f'(\bar{x}) \neq 0$ und ist f^{-1} in $f(\bar{x})$ stetig, dann ist f^{-1} dort differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Beweis: Sei $\bar{x} \in D$ und $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$ mit $x_n \to \bar{x}$.
Da f stetig in $\bar{x}$ (Satz 12.4) gilt $f(x_n) \to f(\bar{x}) =: \bar{y}$
wegen Injektivität ist $f(x_n) \in W \setminus \{\bar{y}\}$ d.h. $\bar{y}$ ist kein isolierter Punkt von W.

Sei $(y_n) \subset W \setminus \{\bar{y}\}$ mit $y_n \to \bar{y}$
Wegen Stetigkeit von f^{-1} in $\bar{y}$ gilt $x_n = f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$
und wegen Injektivität $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\bar{y})}{y_n - \bar{y}} = \frac{x_n - \bar{x}}{f(x_n) - f(\bar{x})} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}}} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Satz 5.3}} \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Da Grenzwert unabhängig von gewählter Folge $(y_n) \subset W \setminus \{\bar{y}\}$ folgt Beh. ▨