Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 28.01.2011

Abgabe: 04.02.2011
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis I

Blatt 12

Aufgabe 1

(a) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5$ um die Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Wie können Sie in diesem Fall Ihr Ergebnis auf Richtigkeit überprüfen?

(b) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{\exp(x)}$ um die Stelle $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung in ein Taylorpolynom. Bestimmen Sie das Restglied und zeichnen Sie mit einem Plotprogramm Ihrer Wahl die Funktion f, das Taylorpolynom 2ter Ordnung und das Taylorpolynom 4ter Ordnung in ein gemeinsames Schaubild.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist und berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie damit die Taylorreihe von f um die Stelle $x_0 = 0$ auf und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Ausgangsfunktion f. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(x)}$ für $x > 0$ **(e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(x)}$ für $\alpha > 0$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen. (Tipp: Versuchen Sie die gegebenen Funktionen unter Ausnutzung der Differentiationsregeln als Ableitung einer anderen Funktion zu schreiben)

(a) $f(x) = \cos^2(x)$ **(b)** $f(x) = \ln(x)$ **(c)** $f(x) = \ln^2(x)$

(d) $f(x) = xe^{-x^2}$ **(e)** $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit einer stetigen Ableitung. Zeigen Sie, dass f dann auch lokal Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 5

(a) In der Vorlesung wurde das Beispiel der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ behandelt. Setzen Sie sich mit diesem Beispiel erneut auseinander und ergänzen Sie dabei alle ausgelassenen Schritte.

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von $f \cdot g$ das Cauchyprodukt der Taylorreihen von f und von g ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass die in (a) berechnete Taylorreihe die Funktion f aus (a) sogar für alle $x \in (-1, 1)$ darstellt.