Kapitel 1 : Zahlen

Grundidee : „Zahlen sind Objekte die man nach üblichen Regeln additiv und multiplikativ verknüpfen kann" ∴ Frage: Was sind übliche Regeln?

Antwort: die aus $\mathbb{Q}$ „bekannten" Regeln

Definition 1.0: Eine Menge K mit Rechenoperationen $+$ und $\cdot$, die je zwei Elementen a, b aus K eindeutig festgelegte Elemente $a+b \in K$ bzw $a \cdot b$ oder kurz $ab \in K$ zuordnen heißt (Zahlen-) <u>Körper</u> $(K, +, \cdot)$ falls die Operationen folgende Regeln erfüllen:

Additionsregeln

A1: $\forall x,y,z \in K$: $(x+y)+z = x+(y+z)$ Assoziativität

A2: $\forall x,y \in K$: $x+y = y+x$ Kommutativität

Es existiert ein <u>neutrales Element</u> der Addition $n_+ \in K$ mit den Eigenschaften

A3: $\forall x \in K$: $x + n_+ = x$

A4: $\forall x \in K$: $\exists u \in K$: $u + x = n_+$

ein solches u heißt <u>additives inverses Element</u> zu x

Vereinbarung : $K^\times := \{a \in K \mid a \text{ ist kein neutrales Element der Addition}\}$

Multiplikationsregeln: M1 : $\forall x,y,z \in K$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

M2 : $\forall x,y \in K$: $x \cdot y = y \cdot x$

Es existiert ein neutrales Element der Multiplikation $n_0 \in K^{\times}$

mit den Eigenschaften

M3 : $\forall x \in K$: $x \cdot n_0 = x$

M4 : $\forall x \in K^{\times}$: $\exists u \in K$: $u \cdot x = n_0$

ein solches u heißt multiplikatives inverses Element zu x

Zusammenspiel : D : $\forall x,y,z \in K$: $x \cdot (y+z) = xy + xz$ Distributivität

Definitionsende

Erste Konsequenzen der Regeln:

Satz 1.1: Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper (← das ist die Voraussetzung des Satzes)

das ist die Behauptung des Satzes → Dann besitzt K genau ein neutrales Element der Addition und genau ein neutrales Element der Multiplikation. Die beiden neutralen Elemente sind verschieden

Beweis: a) Existenz mindestens eines additiven neutralen Elements folgt aus Def. des Körpers.

b) Eindeutigkeit zeigt man sehr oft so:

Angenommen $n_+, \tilde{n}_+$ sind neutrale Elemente der Addition in K

da $x := \tilde{n}_+ \in K$, nutze A3 für neutrales Element n_+: $x + n_+ = x$

also: $\tilde{n}_+ + n_+ = \tilde{n}_+$

da $x := n_+ \in K$, —"— $\tilde{n}_+$: $x + \tilde{n}_+ = x$

also: $n_+ + \tilde{n}_+ = n_+$

zusammen: $n_+ = n_+ + \tilde{n}_+ \underset{A2}{=} \tilde{n}_+ + n_+ = \tilde{n}_+$

c) d) Existenz, Eindeutigkeit von $n_\cdot$ geht genauso mit M3

e) da $n_\cdot \in K^\times = K \setminus \{n_+\}$ ist $n_\cdot \neq n_+$

$\boxtimes$

nach Satz 1.1. darf man so schreiben

Definition 1.2: Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. $\boxed{\text{Das}}$ neutrale Element der Addition wird mit 0 und $\boxed{\text{das}}$ der Multiplikation mit 1 bezeichnet.

beachte: Ein Körper K hat mindestens zwei Elemente und $K^\times = K \setminus \{0\}$

Satz 1.3 Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper.
Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein additives inverses Element
und zu jedem $x \in K^\times$ existiert genau ein multiplikatives inverses Element.

Beweis: a) Existenz: nach Def "Körper"

b) Eindeutigkeit: Sei $x \in K$, $u, v \in K$ seien inverse Elemente

d.h. $\quad u + x = 0 \quad$ mit A_2 $\quad x + u = 0$

also $\quad v + (x + u) = v + 0 \overset{}{\underset{A_3}{=}} v$

mit A_1 $\quad (v + x) + u = v$

da v inverses Element: $\quad v + x = 0$

also $\quad 0 + u = v \quad$ und schließlich $\quad u \overset{A_3}{=} u + 0 \overset{A_2}{=} 0 + u = v$

c), d) Existenz, Eindeutigkeit des multiplik. inversen Elements genauso $\boxtimes$

erst möglich nach Satz 1.3.

Definition 1.4 Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. $\boxed{\text{Das}}$ additive inverse Element zu $x \in K$ wird $-x$ genannt. $\boxed{\text{Das}}$ multiplikative inverse Element zu $x \in K^\times$ wird x^{-1} genannt. Sind $a, b \in K$ so schreibt man auch $a-b$ anstelle von $a+(-b)$. Ist $a \in K$ und $b \in K^\times$ so schreibt man auch $\frac{a}{b}$ anstelle von $a \cdot b^{-1}$.

beachte: alle "üblichen" Rechenregeln sind Konsequenzen der Körperaxiome 1.0 und der Def. 1.2 und 1.4

Satz 1.5. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Dann gelten folgende Rechenregeln

i) $(-0) = 0$

ii) $\forall x \in K: -(-x) = x$

iii) $\forall x \in K: \quad 0 \cdot x = 0$

iv) $\forall x \in K: \quad (-1) \cdot x = -x$

v) $\forall x,y \in K: \quad (-x)(-y) = x \cdot y$

vi) $\forall x,y \in K: \quad (-x)\, y = -(x\, y)$

vii) $\forall x,y \in K: \quad x \cdot y = 0 \iff x = 0 \lor y = 0$

viii) $\forall x \in K^\times: \quad (x^{-1})^{-1} = x$

Beweis: (auszugsweise – Rest bitte selbst ergänzen)

i) $(-0) + 0 \overset{A_4}{=} 0$ da (-0) nach Def 1.4. inverses Element zu 0

nach A_3 ist $(-0) + 0 = (-0)$ da 0 neutrales Element

also $-0 = (-0) + 0 = 0$

ii) Sei $x \in K$ Dann ist mit A_4 $(-x) + x = 0$

mit A_2 $x + (-x) = 0$ d.h. x ist additives Inverses zu $(-x)$

nach Def. 1.4 $x = -(-x)$

iii) $0 \cdot x \overset{A_3}{=} (0+0) \cdot x \overset{D}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$ damit

$$0 \overset{A_4}{=} -(0 \cdot x) + 0 \cdot x = -(0 \cdot x) + (0 \cdot x + 0 \cdot x) \overset{A_1}{=} (-(0 \cdot x) + 0 \cdot x) + 0 \cdot x \overset{A_4}{=} 0 + 0 \cdot x$$

$$\overset{A_2}{=} 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x$$

⋮

vi) $$(-x)(-y) \overset{iv)}{=} ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y) \overset{M_1}{=} (-1) \cdot (x \cdot ((-1) \cdot y)) \overset{M_2}{=} (-1)(((-1) \cdot y) \cdot x)$$

$$\overset{M_1}{=} (-1) \cdot ((-1) \cdot (y \cdot x)) \overset{M_1}{=} ((-1) \cdot (-1))(y \cdot x) \overset{(iv), M_2}{=} (-(-1)) \cdot (x \cdot y)$$

$$\overset{ii}{=} 1 \cdot (x \cdot y) \overset{M_2}{=} (x \cdot y) \cdot 1 \overset{M_3}{=} x \cdot y$$

etc

$(\blacksquare)$

Zur Lösbarkeit der elementaren Aufgaben (bei gegebenen $a, b \in K$)

finde $x \in K$ mit $a + x = b$

bzw $a \cdot x = b$

Satz 1.6: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und seinen $a, b \in K$. Dann hat die Gleichung $a + x = b$ die eindeutige Lösung $x = b - a$.
Ist $a \neq 0$, dann hat die Gleichung $ax = b$ die eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Beweis: Lösungsmenge $L = \{x \in K \mid a + x = b\}$ "Lies: ..."

Zu zeigen ist Mengengleichheit $L = M := \{b - a\}$

Technik: Zeige $M \subseteq L$ und $L \subseteq M$

zu hause Nummer ergänzen!

$M \subseteq L$: Sei $x \in M$ dh $x = b - a \overset{\text{Def}}{=} b + (-a) \in K$

Es gilt $a + x = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$ ✓

also $x \in L$.

$L \subseteq M$: Sei $x \in L$ d.h. $x \in K$ und $a + x = b$

dann $(-a) + (a + x) = (-a) + b$ ⟵ warum, warum, warum?

also $\underbrace{((-a) + a)}_{0} + x = b + (-a)$

ergänzen Sie Schritte und Axiom-Nummern (bis es Ihnen zum Hals raushängt)

d.h. $x = b - a \in M$

genauso zeigt man (d.h. Hausaufgabe) $\{x \in K \mid ax = b\} = \{\frac{b}{a}\}$ $\boxtimes$

Bemerkung: kombinierte elementare Aufgaben für mehrere Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

„lineare Gleichungssysteme"

können ebenfalls systematisch in Körpern gelöst werden (sofern sie lösbar sind)

Axiomatische Einführung der reellen Zahlen (d.h. wir postulieren eine wahre Aussage, die man tatsächlich beweisen kann ... mit entsprechendem Aufwand)

Satz und Def 1.7 Es existiert ein angeordneter, vollständiger Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Die Elemente werden reelle Zahlen genannt.

Neben den Körperaxiomen erfüllen sie die

Anordnungsaxiome: Es existiert eine Relation $\leq$ (kleiner-gleich) mit den Eigenschaften

O1) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \ \vee \ y \leq x$ (totale Ordnung)

O2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \ \wedge \ y \leq x \Rightarrow x = y$

O3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \ \wedge \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

O4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow z + x \leq z + y$

O5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \ \wedge \ 0 \leq z \Rightarrow zx \leq zy$

und das Supremumsaxiom:

Jede nichtleere, $\underbrace{\text{nach oben beschränkte Teilmenge}}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke

Def: A heißt nach oben beschränkt, wenn ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall x \in A: x \leq s$

s heißt obere Schranke von A.

s heißt kleinste obere Schranke, wenn s obere Schranke, jedes $u < s$ aber keine obere Schranke ist.

Wie üblich ist $x \geq y$ gleichbedeutend mit $y \leq x$ und $x < y$ mit $x \leq y \wedge x \neq y$ sowie $x > y$ mit $y < x$

Aus den Anordnungsaxiomen folgen übliche Ungleichungsrechenregeln

Satz 1.8

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x \leq y \implies -y \leq -x$

ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; x \leq y \wedge z \leq 0 \implies zy \leq zx$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \implies xy \geq 0$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}: \; x \cdot x \geq 0$

v) $0 < 1$

vi) $\forall x \in \mathbb{R}, \; 0 < x \implies 0 < \frac{1}{x}$

vii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; 0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Beweis: (auszugsweise ... Rest Übung)

iii) $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ benutze (O5) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}: \; u \leq v \wedge 0 \leq w \implies wu \leq wv$

mit $u := 0$, $v := x$, $w := y$ — wichtiger Trick um Verwirrung zu vermeiden: mit kollisionsfreien Namen neu schreiben

folgt wegen $u \leq v \wedge 0 \leq w$

die Aussage $\underbrace{wu}_{= y \cdot 0 = 0 \text{ (Satz 1.5)}} \leq \underbrace{wv}_{= y \cdot x}$ d.h. $0 \leq y \cdot x$ bzw. $xy \geq 0$

$(\square)$

Welche reellen Zahlen kennen wir bisher? $0, 1, -1$ beachte mit (ii), (v): $-1 < 0 < 1$

Wie geht's weiter? $2 := 1 + 1 \underset{O4}{>} 1 + 0$

$3 := 2 + 1$

$4 := 3 + 1$

$5 := 4 + 1$

usw. gut für endlich viele "neue" Zahlen

Wie konstruiert man alle Zahlen dieses Typs?

Definition 1.9: (induktive Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

a) $1 \in M$ b) $\forall x \in M: x + 1 \in M$

Die Menge aller induktiven Teilmengen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Beispiele: $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ warum? $1 \in \mathbb{R}$ ✓ zu $x \in \mathbb{R}$ ist $x + 1 \in \mathbb{R}$ (siehe Def. Körper) ✓

$(0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \in \mathcal{M}$

$[1, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \in \mathcal{M}$

natürlich auch $[-3, \infty)$ und $[1, \infty) \setminus (1, 2)$ etc. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ $\mathcal{M}$ ist riesig

Definition 1.10 Die Menge der natürlichen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$$ „kleinste" induktive Teilmenge

passt das? $1 \in \mathbb{N}$, denn nach Def 1.9 a) ist $1 \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$

$2 \in \mathbb{N}$ denn $2 = 1+1 \in M$ nach Def 1.9 b) für alle $M \in \mathcal{M}$

$3 \in \mathbb{N}$ denn $3 = 2+1 \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$

usw ✓

Definition 1.11: Die Menge der ganzen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$$

Die Menge der rationalen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} : x = \tfrac{p}{q}\}$$

Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

lies „Kreuz" sog. kartesisches Mengenprodukt; Elemente von $A \times B$ sind Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$

Die Elemente von $\mathbb{C}$ werden statt mit (a,b) $a,b \in \mathbb{R}$ meist mit $a+ib$ oder $a+bi$ bezeichnet. Speziell schreibt man 0 statt $(0,0)$, a statt $(a,0)$, ib oder bi statt $(0,b)$ und i statt $(0,1)$.

Die erste Komponente einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird Realteil $Re(z) \in \mathbb{R}$, die zweite Komponente Imaginärteil $Im(z) \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

Auf $\mathbb{C}$ werden eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ definiert durch

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Ende der Definition !

Satz 1.12: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ und $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ erfüllt auch die Anordnungsaxiome nicht aber das Vollständigkeitsaxiom. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ kann nicht angeordnet sein.

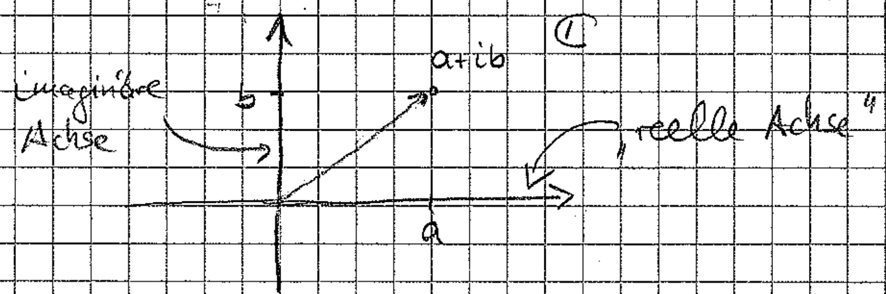
Beweis: alle Körperbedingungen aus Def 1.0 nachprüfen !

(13.1)

Beweis von Satz 1.12: Körperaxiome von $\mathbb{C}$ = Übung von $\mathbb{Q}$ Hausaufgabe; Anordnungsaxiome von $\mathbb{Q}$ Hausaufgabe

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Elemente (a,b) $a,b \in \mathbb{R}$ oder mit Schreibweise $a + ib$

Graphische Darstellung als Punkte oder Ortsvektor in der Ebene „Gaußsche Zahlenebene"



Mit der Schreibweise $a = a + i0$ kann $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet werden

die dazu „senkrechten Zahlen" $ib = 0 + ib$ werden „rein imaginär" genannt

Addition: $(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$

neutrales Element $(0,0) = 0$, inverses Element zu (a,b): $(-a,-b)$

Multiplikation: $(a,b)\cdot(c,d) := (ac - bd, ad + bc)$

neutrales Element: $(1,0) =: 1$

das Besondere an $\mathbb{C}$: $i := (0,1)$ erfüllt $i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$ Inverses zu $(1,0)$

Angenommen es gibt $\leq$ Relation in $\mathbb{C}$, die Anordnungsaxiome erfüllt

Dann gilt auch Satz 1.8 und damit $-1 = i \cdot i \underset{(iv)}{\geq} 0 \underset{(i),(v)}{>} -1$ $\lightning$

Damit kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet sein

Die nicht-Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$ schauen wir uns später an... <u>Vorgucker</u>:

$\{q \in \mathbb{Q} \mid q \cdot q \leq 2\}$ ist nach oben beschränkt z.B. durch $s = 2 \in \mathbb{Q}$

besitzt aber keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$.

In $\mathbb{R}$ gibt es eine kleinste obere Schranke – die werden wir $\sqrt{2}$ nennen ($\boxed{}$)

noch einige nützliche Abkürzungen ($\hat{=}$ Definitionen)

1) Klammerunterdrückung

wegen A1 bzw M1 liefert jede Klammerung von Mehrfachadditionen bzw. -multiplikationen das gleiche Ergebnis:

$$((a_1 + a_2) + a_3) + a_4$$
$$\overset{A1}{=} (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$$
$$\overset{A1}{=} a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$$
$$\overset{A1}{=} a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)$$
$$\overset{A1}{=} \text{etc}$$

Ein Ausdruck $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ <u>ohne</u> Klammern ist damit unmissverständlich und kann ohne Einschränkung durch $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$ definiert werden

Bei gemischten Mehrfachoperationen gilt die Regel Punkt-vor-Strich d.h. Multiplikationen werden vor Additionen ausgeführt, zB.

$$x + y \cdot z := x + (y \cdot z)$$

2) Summen, Produkte und Potenzen

<u>Potenzen</u> Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper und $x \in K$.

Dann ist $x^0 := 1$

und $x^{n+1} := x \cdot x^n \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

Dies ist eine sog. <u>rekursive</u> (oder induktive) <u>Definition</u>

Beispiel: $x^4 = x \cdot x^3 = x \cdot (x \cdot x^2) = x \cdot (x \cdot (x \cdot x^1)) = x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot \underbrace{x^0}_{=1}))) \overset{\text{mit (1)}}{=} x \cdot x \cdot x \cdot x$

was genau soll hier stehen?

schlampige Version: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$ $\rightsquigarrow$ Pünktchendefinitionen sind nicht präzise!

Für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$

beachte: passt zum Symbol x^{-1} für multiplikatives Inverses

<u>Fakultät:</u> $0! := 1$

$(n+1)! := (n+1)n! \quad n \in \mathbb{N}_0$

schlampig $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

allgemeine Mehrfachprodukte und -summen:

Sei $\mathbb{Z}_{\geq m} = \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \geq m \}$ für $m \in \mathbb{Z}$

und $a: \mathbb{Z}_{\geq m} \longrightarrow W$ mit $W \subset K$, $(K, +, \cdot)$ Körper

$k \longmapsto a(k) =: a_k$

Funktion besteht aus Definitionsmenge $\mathbb{Z}_{\geq m}$, Wertemenge W, und Abbildungsvorschrift

Beispiel: $a: \mathbb{N}_0 \longrightarrow K$ oder $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$k \longmapsto x$ $\qquad$ $k \longmapsto k$

festes Element aus K
„konstante Funktion"

$\prod$ = "Pi"

Produkt

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \qquad n \in \mathbb{Z}_{<m} := \{ z \in \mathbb{Z} \mid z < m \}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_n \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_k \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq m}$$

sog. Laufindex

lies: Produkt von $k=m$ bis n über a_k $\qquad$ schlampig $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Beispiele mit $a_k = x$ konstant: $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} x = x^n$

$a_k = k$ $\qquad \prod_{k=1}^{n} k = n!$

entsprechend für Summen $\qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad n \in \mathbb{Z}_{<m}$

"Sigma" Σ

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq m}$$

lies „Summe von $k=m$ bis n über a_k"

In Programmiersprachen: „Schleifen"

```
S := 0
for k = m to n do S := S + a_k
print S
```

```
S := 1
for k = m to n do S := S · a_k
print S
```