Kapitel 2: Induktion

Hat jemand die Definition $x^0 := 1$, $x^{n+1} := x \cdot x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ angezweifelt?

Erreicht man mit $0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ 0+1+1+1, \ldots$ wirklich alle $n \in \mathbb{N}_0$?

gibt es vielleicht $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, das nicht von dieser Form ist?

Dann wäre $x^{\tilde{n}}$ gar nicht definiert?

Überraschung: das ist gar nicht so einfach auszuschließen

A2 implizit benutzt?

Satz 2.1 $\mathbb{N}$ ist induktiv

Beweis: $\mathbb{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$

$\mathcal{M}$ induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$

Nach Def 1.9 a) $\forall M \in \mathcal{M} : 1 \in M$ also $1 \in \mathbb{N}$ ✓

Sei $n \in \mathbb{N}$ dann $\forall M \in \mathcal{M} : n \in M$

mit Def 1.9 b) $\forall M \in \mathcal{M} : n+1 \in M$ also $n+1 \in \mathbb{N}$ ✓

$\mathbb{N}$ erfüllt Bedingungen aus Def 1.9 d.h. $\mathbb{N}$ induktiv $\blacksquare$

Satz 2.2: $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

Beweis: $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ist induktiv

also $\mathbb{N} \subseteq [1, \infty)$ ☒

Definition 2.3.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $n+1$ der Nachfolger von n.

Ist $n-1 \in \mathbb{N}$ dann heißt $n-1$ Vorgänger von n.

Satz 2.4: Das einzige Element in $\mathbb{N}$ ohne Vorgänger ist 1.

Beweis: Aussage in Symbolen: $(\forall n \in \mathbb{N} : n = 1 \vee n-1 \in \mathbb{N}) \wedge 1-1 \notin \mathbb{N}$

mit Satz 2.2 ✓

Trick: beweise $\forall n \in \mathbb{N}$: ... Aussage durch Mengengleichheit $M = \mathbb{N}$ mit

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 1 \vee n-1 \in \mathbb{N}\}$$

„$M \subseteq \mathbb{N}$": nach Definition von M ✓

„$\mathbb{N} \subseteq M$": Trick: zeige M induktiv d.h. $M \in \mathcal{M}$, dann $\mathbb{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \subseteq M$

Trick ∘ Trick =: Trick²

„$1 \in M$": nach Def von M

„$m \in M \Rightarrow m+1 \in M$": Sei $m \in M$ dann $m \in \mathbb{N}$ und: $\underbrace{m = 1 \text{ oder } m-1 \in \mathbb{N}}_{\text{wird nicht benötigt}}$

dann $m+1 \in \mathbb{N}$ da $\mathbb{N}$ induktiv

und $(m+1) - 1 = m \in \mathbb{N}$

also $m+1 \in M$

$\boxtimes$

damit anschaulich klar: x^n definiert durch Vorgänger x^{n-1}

x^{n-1} — " — x^{n-2}

etc.

kommt man irgendwann auf $x^0 = 1$?

schlecht wäre, wenn Vorvor...vorgänger von n ...

zwischen 1 und 2 liegt ... das geht aber nicht, da

diese natürliche Zahl keinen Vorgänger hätte! Genauer:

Satz 2.5: Zwischen $n \in \mathbb{N}$ und dem Nachfolger $n+1$ liegt keine weitere natürliche Zahl

Beweis: zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \cap (n, n+1) = \emptyset$ wobei $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

„offenes Intervall" zwischen $a, b \in \mathbb{R}$

wieder Trick^2: zeige $M = \mathbb{N}$

mit $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \cap (n, n+1) = \emptyset\}$ ist induktiv

„$1 \in M$": $\{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv d.h. $\mathbb{N} \subseteq \{1\} \cup [2, \infty)$

damit $\mathbb{N} \cap (1,2) \subseteq (\{1\} \cup [2, \infty)) \cap (1,2) = \emptyset$

also $1 \in M$

„$m \in M \Rightarrow m+1 \in M$": Sei $m \in M$ d.h. $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \cap (m, m+1) = \emptyset$

Angenommen $k \in \mathbb{N} \cap (m+1, m+2)$. Wegen $m \in \mathbb{N}$ ist $m \geq 1$ (Satz 2.2.)

also $k > m+1 \geq 2$

Mit Satz 2.4 ist $k-1 \in \mathbb{N}$ und $m < k-1 < m+1$ d.h. $k \in \mathbb{N} \cap (m, m+1) \neq \emptyset$ ↯

also $\mathbb{N} \cap (m+1, m+2) = \emptyset$ d.h. $m+1 \in M$ ∎

Bemerkung zur Logik: Wir wollen zeigen: A ist wahr (1)

Unser Beweis $\neg A \Rightarrow F$ war logisch korrekt d.h. $\neg A \Rightarrow F$ ist wahr (1)

Die Aussage F ist falsch (0)

damit ist A wahr, denn die Wahrheitstabelle von $\Rightarrow$

hat die Form

P	K	$P \Rightarrow K$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

siehe Vorkurs-Skript

Viele Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

beweist man mit Trick^2 d.h. man zeigt $M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$ ist induktiv

d.h. $A(1)$ „Induktionsanfang" IA

und $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ „Induktionsschritt" IS

sog. <u>Beweis durch vollständige Induktion</u>

sog. Induktionsannahme

Satz 2.6: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist $n+m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$. Übung

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen $\forall\, n \in \mathbb{N}: \underbrace{n+m \in \mathbb{N}}_{A(n)}$

IA: da $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ induktiv ist $1+m \in \mathbb{N}$ d.h. $A(1)$ ist wahr ✓

IS: Sei $A(n)$ wahr d.h. $n+m \in \mathbb{N}$; da $\mathbb{N}$ induktiv ist $(n+1)+m = (n+m)+1 \in \mathbb{N}$ d.h. $A(n+1)$ ist wahr ✓

$\forall\, n \in \mathbb{N}: n \cdot m \in \mathbb{N}$

IA: $1 \cdot m = m \in \mathbb{N}$ ✓

IS: $(n+1)\cdot m = \underbrace{nm}_{\in \mathbb{N} \text{ nach Ind.ann.}} + m \in \mathbb{N}$ nach Teilaussage 1

Satz 2.7: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit $x, y \in K$. Weiter seien $p, q \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten die Potenzgesetze

$$x^p x^q = x^{p+q}$$
$$(xy)^p = x^p y^p$$
$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

Übung

Beweis (auszugsweise)

Sei $x \in K$, $p \in \mathbb{N}_0$. Zu zeigen: $\forall q \in \mathbb{N}: x^p x^{q-1} = x^{p+q-1}$

IA: $q = 1$: $x^p \cdot x^0 = x^p \cdot 1 = x^p = x^{p+1-1}$ ✓

IS: $x^p x^{(q+1)-1} = x^p x^q \underset{\text{Potenzdef.}}{=} x^p \cdot (x \cdot x^{q-1}) = x \cdot x^p \cdot x^{q-1} \underset{A(q)}{=} x\, x^{p+q-1} \underset{\text{Potenzdef.}}{=} x^{p+q} = x^{p+(q+1)-1}$

damit $A(q) \Rightarrow A(q+1)$

andere Aussagen entsprechend ($\blacksquare$)

Satz 2.8: Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $p, q \in K$ sowie $a, b : \mathbb{N} \to K$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Linearität der Summe d.h. $\sum_{k=1}^{n} (pa_k + qb_k) = p \sum_{k=1}^{n} a_k + q \sum_{k=1}^{n} b_k$ und die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & q \neq 0 \\ n+1 & q = 0 \end{cases}$

Beweis: IA: (beachte: bei Induktion in $\mathbb{N}_0$ starte mit $n = 0$)

$$\sum_{k=1}^{0} (pa_k + qb_k) = 0 = p \cdot 0 + q \cdot 0 = p \cdot \sum_{k=1}^{0} a_k + q \cdot \sum_{k=1}^{0} b_k$$

(2b)

Fall $q = 1$: s.o.

Sei $q \neq 1$: IA (beachte bei Induktion in $\mathbb{N}_0$ starte mit $n = 0$)

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{q^1 - 1}{q - 1} \checkmark$$

IS:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k \underset{\text{Def}}{\overset{\uparrow}{=}} q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{A(n)}{\overset{\uparrow}{=}} q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}(q-1) + q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \checkmark$$

(☒)