Kapitel 3: (Un)-Endlichkeit und (Un)-Beschränktheit

Definition 3.1. Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$; $s \in \mathbb{R}$ heißt

obere Schranke von A falls $\forall a \in A: a \leq s$

untere — " — $\forall a \in A: s \leq a$

Existiert eine obere (untere) Schranke, dann heißt A nach oben (unten) beschränkt

Existiert keine — " — — " — unbeschränkt

Existiert eine obere und eine untere Schranke, dann heißt A beschränkt.

sonst unbeschränkt

Enthält A eine untere Schranke so wird diese $\min A$ „Minimum von A" genannt

— " — obere — " — $\max A$ „Maximum von A" genannt

Ist A nach oben beschränkt, so wird die kleinste obere Schranke $\sup A$ „Supremum von A" genannt

— " — unten — " — größte untere Schranke $\inf A$ „Infimum von A" genannt

Bemerkung: eigentlich muss zunächst gezeigt werden, dass nach unten beschränkte Mengen eine größte untere Schranke haben ...

Tatsächlich ist $-\sup(-A)$ größte untere Schranke von A, denn

da A nach unten beschränkt gibt es $s \in \mathbb{R}$ mit $s \leq a$ für alle $a \in A$

dann $-s \geq -a$ für alle $a \in A$ d.h. $K = -s$ ist obere Schranke von

$$-A := \{ x \in \mathbb{R} \mid x = -a \text{ für ein } a \in A \}$$

nach Supremumsaxiom gilt: $\sup(-A)$ ist kleinste obere Schranke von $-A$

d.h. $\forall a \in A : -a \leq \sup(-A)$

bzw $\forall a \in A : -\sup(-A) \leq a$

d.h. $-\sup(-A)$ ist untere Schranke von A

jeder größere Wert $u > -\sup(-A)$

erfüllt $-u < \sup(-A)$ d.h. $-u$ ist keine obere Schranke von $-A$

d.h. es gibt $a \in A$ mit $-u < -a$ d.h. $a < u$ d.h. u ist keine untere Schranke mehr

also $-\sup(-A)$ ist größte untere Schranke ∴ die größte untere Schranke existiert

Satz 3.2: $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt und $\min \mathbb{N} = 1$

Beweis: Satz 2.2: 1 ist untere Schranke und $1 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\min \mathbb{N} = 1$.

Angenommen $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt

dann existiert $S = \sup \mathbb{N}$ d.h. S obere Schranke

und $S-1$ keine obere Schranke

also gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $S-1 < n$

also $S < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ ↯ zu S obere Schranke von $\mathbb{N}$ $\boxtimes$

Quiz:

halboffene Intervalle:

		Maximum	Minimum	Supremum	Infimum ?
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$		b	—	b	a
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$		—	a	b	a
$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$		—	—	b	—

Definition 3.3: Zwei Mengen A, B heißen <u>gleichmächtig</u>, wenn eine Bijektion $\varphi: A \to B$ existiert. Eine Menge A heißt <u>endlich</u> wenn A und $\mathbb{N}_{\leq m} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$ gleichmächtig sind für ein $m \in \mathbb{N}$. Ist A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ so heißt A abzählbar unendlich. A heißt unendlich, wenn A eine abzählbar unendliche Teilmenge hat.

<u>lustig:</u> $\mathbb{N}$ und $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}\}$ sind gleichmächtig

Erinnerung: eine Abbildung heißt <u>bijektiv</u> (Bijektion) falls sie <u>surjektiv</u> und <u>injektiv</u> ist

$\varphi: \mathbb{N} \to G$, $n \mapsto 2n$ ist <u>surjektiv</u>, denn jedem $g \in G$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $g = 2m$

d.h. $g = \varphi(m)$ ✓

„jedes Element der Wertemenge wird erreicht"

ist <u>injektiv</u>, denn $\varphi(m) = \varphi(n)$ impliziert $2m = 2n$

also $m = n$ „unterschiedliche Urbilder haben unterschiedliche Bilder"

oder $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ sind gleichmächtig $S_+: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq 2}$, $n \mapsto n+1$

$m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ hat Vorgänger $m-1 \in \mathbb{N}$
also $m = \varphi(m-1)$
$\Rightarrow$ surjektiv

$\varphi(n) = n+1 = m+1 = \varphi(m)$
impliziert $n = m$

das ist eine Eigenschaft aller <u>unendlichen</u> Mengen:

Satz 3.4: Sei A eine unendliche Menge und $a \in A$. Dann sind A und $A \setminus \{a\}$ gleichmächtig.

Ist A nicht endlich, dann ist A unendlich.

Beweis: Sei A unendlich. Dann existiert $B \subset A$ und Bijektion $\varphi : B \to \mathbb{N}$

„Ohne Beschränkung der Allgemeinheit" OBdA ist $a \in B$ und $\varphi(a) = 1$

denn sonst arbeite mit $\tilde{B} := B \cup \{a\}$ und $\tilde{\varphi}(a) := 1$

und $\tilde{\varphi}(b) := \varphi(b) + 1 \quad b \in B$

bzw. wenn $a \in B$ mit $\tilde{\varphi} := \chi \circ \varphi$ wobei $\chi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ Bijektion

$\chi(\varphi(a)) := 1$

$\chi(1) := \varphi(a)$

$\chi(n) := n \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, \varphi(a)\}$

Dann ist $\psi : A \to A \setminus \{a\}$

definiert durch $\psi(x) = \begin{cases} x & x \notin B \\ \varphi^{-1}(S_+(\varphi(x))) & x \in B \end{cases}$ eine Bijektion.

↑ Verknüpfung injektiver Abb. ist injektiv!

Sei $A_0 := A$ nicht endlich wähle $\varphi_1 \in A$ und setze $A_1 := A_0 \setminus \{\varphi_1\}$

Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gewählt mit $A_k = A_{k-1} \setminus \{\varphi_k\}$ $k = 1, \dots, n$

dann ist $A_n \neq \emptyset$ denn sonst wäre $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq n}$, $k \longmapsto \varphi_k$ eine Bijektion d.h. A endlich ↯

wähle $\varphi_{n+1} \in A_n$ und setze $A_{n+1} := A_n \setminus \{\varphi_{n+1}\}$

Mit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$, $k \longmapsto \varphi_k$ ist injektiv d.h. $\varphi(\mathbb{N}) \subset A$ ist abzählbar unendlich

also A unendlich ▨

... und unterscheidet sie von endlichen Mengen

Satz 3.5: Sei A endlich und $a \in A$. Dann sind A und $A \setminus \{a\}$ nicht gleichmächtig

Beweis: Wir zeigen zunächst $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{N}_{\leq n+1}$ und $\mathbb{N}_{\leq n}$ sind nicht gleichmächtig

IA: Sei $\varphi : \mathbb{N}_{\leq 2} = \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq 1} = \{1\}$ d.h. $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ d.h. φ nicht bijektiv

also $\mathbb{N}_{\leq 2}$ und $\mathbb{N}_{\leq 1}$ nicht gleichmächtig

IS: Sei $\varphi : \mathbb{N}_{\leq n+2} \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq n+1}$ bijektiv

OBdA $\varphi(n+2) = n+1$ (sonst verknüpfe mit Transposition $\chi(\varphi(n+2)) := n+1$
$\chi(n+1) := \varphi(n+2)$
$\chi(k) := k$ für übrige $k \in \mathbb{N}_{\leq n+1}$)

da $\mathbb{N}_{\leq n+2} \setminus \{n+2\} = \mathbb{N}_{\leq n+1}$ (Satz 2.5)

ist $\varphi(\mathbb{N}_{\leq n+1}) = \mathbb{N}_{\leq n+1} \setminus \{n+1\} = \mathbb{N}_{\leq n}$

d.h. $\varphi|_{\mathbb{N}_{\leq n+1}} : \mathbb{N}_{\leq n+1} \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq n}$ Bijektion $\lightning$ zur Induktionsannahme

„eingeschränkt auf"

Sei $\varphi: A \to \mathbb{N}_{\leq n}$ Bijektion

OBdA $\varphi(a) = n$ (sonst verknüpfe mit Transposition)

also $\psi := \varphi|_{A \setminus \{a\}} : A \setminus \{a\} \to \mathbb{N}_{\leq n-1}$ Bijektion

wären A und $A \setminus \{a\}$ gleichmächtig mit Bijektion $\chi: A \to A \setminus \{a\}$

dann wäre $\psi \circ \chi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{N}_{\leq n} \to \mathbb{N}_{\leq n-1}$ Bijektion $\lightning$ $\square$

Korollar 3.6 A ist unendlich genau dann wenn A nicht endlich ist.

Beweis: „$\Leftarrow$" Satz 3.4, „$\Rightarrow$" A unendlich $\underset{\text{Satz 3.4}}{\Rightarrow}$ $A, A \setminus \{a\}$ gleichmächtig $\underset{\text{Satz 3.5 (Umkehrung)}}{\Rightarrow}$ A nicht endlich $\square$

Satz 3.7 Seien $n, m \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}_{\leq m}, \mathbb{N}_{\leq n}$ sind gleichmächtig genau dann, wenn $n = m$.

Beweis: „$\Leftarrow$" sei $n = m$, wähle Bijektion $\varphi(k) = k$ ✓

„$\Rightarrow$" Seien $\mathbb{N}_{\leq m}, \mathbb{N}_{\leq n}$ gleichmächtig. Fall 1: $n = m$ ✓

Fall 2: $m > n = 1$ wegen $\mathbb{N}_{\leq n} = \{1\}$ ist $\varphi: \mathbb{N}_{\leq m} \to \mathbb{N}_{\leq 1}$ konstant

also $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ d.h. φ nicht bijektiv $\lightning$ dieser Fall tritt nicht auf

Fall 3: $m > n > 1$

35

per Induktion zeigt man $\forall k \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{N}_{\leq m-k}$, $\mathbb{N}_{\leq n-k}$ sind gleichmächtig $\forall$ $k \geq n$

mit $k = n-1$ folgt $\mathbb{N}_{m-n+1}$, $\mathbb{N}_{\leq 1}$ gleichmächtig ↯ wie im Fall 2 ... nur Fall 1 ist möglich

IA: k=0: $\mathbb{N}_{\leq m}$, $\mathbb{N}_{\leq n}$ gleichmächtig nach Voraussetzung ✓

IS: sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_{\leq m-k}$, $\mathbb{N}_{\leq n-k}$ gleichmächtig $\forall$ $k \geq n$

Fall 1: $k \geq n$ dann $k+1 \geq n$ ✓

Fall 2: $k = n-1$ dann $k+1 = n$ ✓

Fall 3: $k < n-1$ dann $k < n$ also gibt es $\varphi: \mathbb{N}_{\leq m-k} \to \mathbb{N}_{\leq n-k}$ bijektiv

OBdA $\varphi(m-k) = \varphi(n-k)$ (sonst nutze Transposition)

mit $\psi := \varphi|_{\mathbb{N}_{\leq m-(k+1)}} : \mathbb{N}_{\leq m-(k+1)} \to \mathbb{N}_{\leq n-(k+1)}$ bijektiv

insgesamt $\mathbb{N}_{\leq m-(k+1)}$, $\mathbb{N}_{\leq n-(k+1)}$ gleichmächtig $\forall$ $k+1 \geq n$

„Verkettung" $f \circ g(x) = f(g(x))$

Konsequenz: A endlich dann existiert $\varphi: A \to \mathbb{N}_{\leq n}$ bijektiv mit n eindeutig

denn $\varphi_1: A \to \mathbb{N}_{\leq n_1}$, $\varphi_2: A \to \mathbb{N}_{\leq n_2}$ bijektiv, dann $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{N}_{\leq n_1} \to \mathbb{N}_{\leq n_2}$ bijektiv also $n_1 = n_2$ (Satz 3.7) hier wichtig, dass n eindeutig!

Definition 3.8: Sei A eine Menge. Ist A gleichmächtig mit $\mathbb{N}_{\leq n}$ so heißt $n \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit von A (kurz $|A| = n$). Ist A unendlich, so schreiben wir $|A| = \infty$. Im Fall $A = \emptyset$ setzen wir $|\emptyset| = 0$.

Satz 3.9: Sei $A \subset \mathbb{R}$ endlich. Dann existieren $\min A$ und $\max A$. Insbesondere sind endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis: Induktion über $|A|$

IA: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $|A| = 1$ d.h. es gibt $\varphi : \mathbb{N}_{\leq 1} = \{1\} \longrightarrow A$ bijektiv

also $A = \varphi(\{1\}) = \{\varphi(1)\}$ d.h. $\varphi(1) \leq a \leq \varphi(1)$ für alle $a \in A$ ✓

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $|A| = n+1$, d.h. es gibt $\varphi : \mathbb{N}_{\leq n+1} \longrightarrow A$ bijektiv

dann $\psi := \varphi|_{\mathbb{N}_{\leq n}} : \mathbb{N}_{\leq n} \to A \setminus \{\varphi(n+1)\} = \tilde{A}$ bijektiv also $|\tilde{A}| = n$

d.h. $\varphi(u) = \min \tilde{A}$, $\varphi(o) = \max \tilde{A}$ existieren

Fallunterscheidung

$\varphi(n+1) \geq \max \tilde{A}$	dann	$\underset{\in A}{\varphi(u)} \leq a \leq \varphi(n+1)$	für alle $a \in A$
$\varphi(n+1) \leq \min \tilde{A}$	dann	$\varphi(n+1) \leq a \leq \underset{\in A}{\varphi(o)}$	für alle $a \in A$
	sonst	$\varphi(u) \leq a \leq \varphi(o)$	für alle $a \in A$

in jedem Fall: $\min A$, $\max A$ existieren. ✓ ☒

Beispiele: $|\mathbb{Z}| = \infty$ und $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

$$\varphi \downarrow \begin{array}{ll} \mathbb{Z}: & 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots \\ \mathbb{N}: & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \end{array}$$

$|\mathbb{Q}| = \infty$ und $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich

$$\varphi \downarrow \begin{array}{l} \mathbb{Q} \\ \mathbb{N} \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 & 11 & 19 & \\ 0 \to & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} \to & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} \to & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} \to & \ldots \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\ 6 & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2}\ 18 & \frac{-3}{2} & \ldots \\ 7 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\ 9 & \frac{2}{3}\ 10 & \frac{-2}{3}\ 17 & \frac{3}{3} & \frac{-3}{3} & \\ 8 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\ 13 & \frac{2}{4} & & & & \\ 14 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5}\ 16 & & & & & \\ 15 & \frac{1}{6} & & & & & & \end{array}$$

Mit dieser Idee zeigt man

Satz 3.10 Sind A_n, $n \in \mathbb{N}$ abzählbar viele abzählbar unendliche Mengen, dann ist auch $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar unendlich.