Kapitel 4: Abstandsmessung in $\mathbb{R}$

Definition 4.1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt $|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ der <u>Absolutbetrag</u> von x

und $d(x,y) := |x-y|$ heißt <u>Abstand</u> oder <u>Distanz</u> zwischen x und y.

<u>Bem:</u> grundlegende Aussagen zu $|\cdot|$ benötigen Beweismethode der <u>Fallunterscheidung</u>, da $|\cdot|$ durch Fallunterscheidung definiert ist.

Lemma 4.2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $-|x| \leq x \leq |x|$. Ist umgekehrt $-a \leq x \leq a$ für ein $a \geq 0$, dann ist $|x| \leq a$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Mit Ordnungsaxiom O1 folgt $0 \leq x$ oder $x \leq 0$

bzw wegen $x \leq 0 \Leftrightarrow (x < 0 \vee x = 0)$, $0 \leq x$ oder $x < 0$

Fall 1: $x \geq 0$ dann $-|x| \underset{\text{Def 1.1}}{=} -x \underset{\text{Satz 1.8}}{\leq} 0 \leq x \leq x \underset{\text{Def 1.1}}{=} |x|$ ✓

Fall 2: $x < 0$ dann $-|x| \underset{\text{Def 1.1}}{=} -(-x) \underset{\text{Satz 1.5}}{=} x \leq x < 0 \underset{\text{Satz 1.8}}{\leq} -x \underset{\text{Def 1.1}}{=} |x|$ ✓

also in jedem Fall $-|x| \leq x \leq |x|$

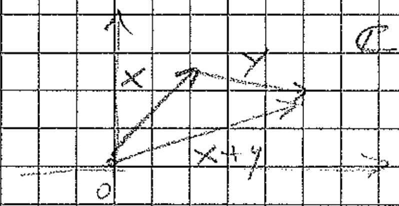
genauso folgt aus $-a \le x \le a$ mit $a \ge 0$

Fall 1: $x \ge 0$ $\quad |x| = x \le a$ ✓

Fall 2: $x < 0$ $\quad |x| = -x$ und wegen $-a \le x$ und Satz 1.8: $-x \le a$

also in jedem Fall $|x| \le a$ $\quad \boxtimes$

Satz 4.3: Der Abstand erfüllt die Bedingungen



i) $\forall x \in \mathbb{R}: |x| \ge 0$ und $\forall x \in \mathbb{R}: |x| = 0 \iff x = 0$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |xy| = |x| \cdot |y|$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x+y| \le |x| + |y|$ „Dreiecksungleichung" $\rightarrow$ Name entliehen vom Absolutbetrag in $\mathbb{C}$ (siehe Übung)

Beweis: i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Fall $x \ge 0$: $|x| = x \ge 0$ ✓ Fall $x < 0$: $|x| = -x > 0$ ✓

Zeige Äquivalenz „$\iff$" stets durch zwei Implikationen „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$"

(Vorteil: vermeidet üble Fehlerquelle „Argumentationsrichtung $\neq$ Schreibrichtung")

„$x = 0 \Rightarrow |x| = 0$" $\quad |0| \overset{\text{Def}}{=} 0$ ✓

„$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$" $\quad 0 = -|x| \le x \le |x| = 0$ (Lemma 4.1) also $0 \le x \le 0$ d.h. $x = 0$

ii) hier gibt es vier Fälle

$y \backslash x$	≥ 0	< 0
≥ 0	I	II
< 0	IV	III

I: $|xy| = xy = |x|\,|y|$ II: $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$

III: $|xy| = -(xy) = (-x)y = |x|\,|y|$ IV: $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x|\,|y|$

iii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$ (Lemma 4.2)

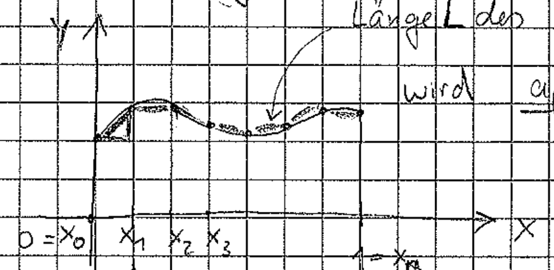
also $-(|x| + |y|) = -|x| + (-|y|) \underset{O4}{\leq} x + (-|y|) \underset{O4}{\leq} x + y \underset{O4}{\leq} |x| + y \underset{O4}{\leq} |x| + |y|$

also $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Lemma 4.2) da $|x| + |y| \geq 0$ (mit (i)) $\square$

Abstände spielen in der Analysis eine entscheidende Rolle

Sie ermöglichen das Konzept der <u>Annäherung</u> (lat. <u>Approximation</u>)

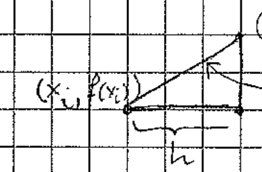
Beispiel: <u>Längenberechnung</u>



Länge L des <u>Funktionsgraphen</u> $\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y = f(x) \}$

wird <u>approximiert</u> durch Länge l_n des Polygonzugs

dichte Hilfspunkte $x_i = ih, \quad h = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$



mit Schulmathematik (Pythagoras)

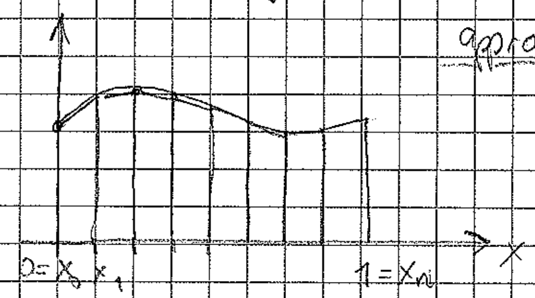
$\sqrt{h^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$

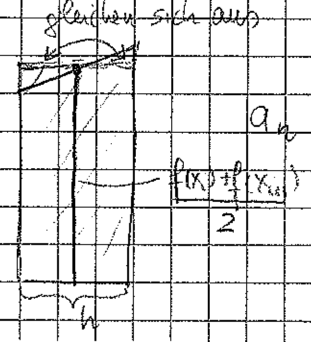
$$l_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{h^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

umso <u>genauer</u> je größer $n \in \mathbb{N}$!

Beispiel: <u>Flächenberechnung</u>

Fläche A zwischen Graph Γ und x-Achse wird approximiert durch Fläche a_n zwischen Polygonzug und x-Achse



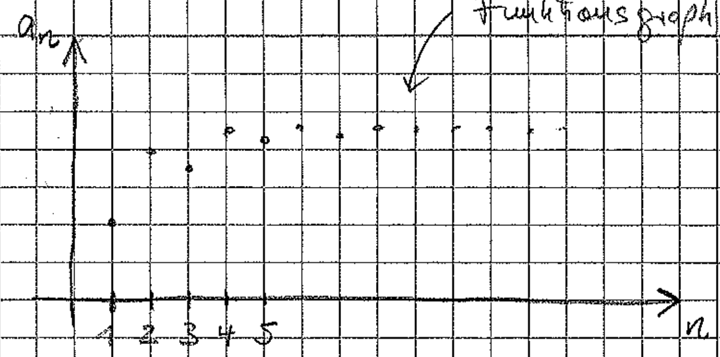


$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$$

umso <u>genauer</u> je größer $n \in \mathbb{N}$.

z.B.

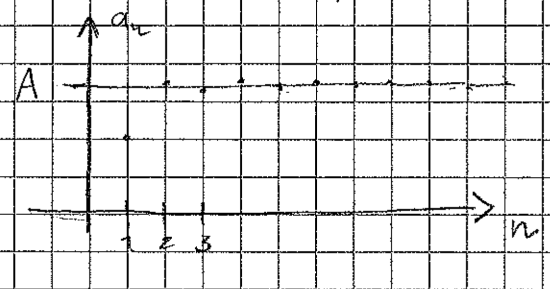
Funktionsgraph von $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto a_n$



Definition 4.4.: Sei $\emptyset \neq E$. Eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to E$ heißt Folge in E.
Folgen in $\mathbb{R}$ werden auch reelle Folgen genannt. Statt a schreibt man auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_n).

Bem: allgemeiner nennt man auch $b: \mathbb{Z}_{\geq m} \to E$ Folgen in E
mit $a_n := b_{n+m}$ lässt sich die Situation aber stets auf Def 4.4 zurückführen

Wir halten fest: Approximationsverfahren erzeugen Zahlenfolgen
der approximierte Wert ist der, zu dem die Folge "hinläuft"



Beispiel: Fläche unter Graph von $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} \cdot h = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 = \frac{h}{2}\underbrace{x_0^2}_{=0} + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Umindizierung $j = i+1$ läuft von 1 bis n

$$= h\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{h}{2}\cdot \underbrace{x_n^2}_{=1}$$

$$= h\sum_{i=1}^{n-1} i^2 h^2 + \frac{h}{2} = h^3 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{h}{2}$$

mit Induktion zeigt man $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ und wegen $h = \frac{1}{n}$

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$$

die Folgenwerte erfüllen $d(a_n, \frac{1}{3}) = \frac{1}{6n^2}$

d.h. der <u>Abstand</u> zu $A = \frac{1}{3}$ wird <u>beliebig klein</u> wenn Stützstellenzahl genügend groß ist

etwa für Genauigkeitsanforderung "k-Stellen" $\varepsilon = \frac{10^{-k}}{2}$ ist $d(a_n, A) < \varepsilon$

falls $\frac{1}{6n^2} < \varepsilon$ bzw $n^2 > \frac{1}{6\varepsilon}$ wegen $n^2 \geq n$ also sicherlich falls $n \geq \frac{1}{6\varepsilon} = \frac{1}{3}10^k$

Induktion!

(genauer $n \geq \frac{1}{\sqrt{3}}10^{k/2}$) noch nicht def.

damit quantitativ: a_n nähert die Zahl $A = \frac{1}{3}$ beliebig genau an (sog. Grenzwert von (a_n))

und qualitativ: a_n nähert den "$\underbrace{\text{Flächeninhalt unter dem Graph von } f}_{\text{noch nicht definiert}}$" beliebig genau an

typischer Analysiszugang: wir definieren den Flächeninhalt als den Grenzwert der Approximationsfolge, falls dieser existiert.

Kapitel 5: Konvergente reelle Folgen

Definition 5.1: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>konvergent</u> mit Grenzwert $A \in \mathbb{R}$ (in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$, $a_n \longrightarrow A$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$) falls für alle Genauigkeits-vorgaben $\varepsilon > 0$ ein Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, ab dem gilt: $d(a_n, A) < \varepsilon$.

lies: „Limes von a_n für n gegen Unendlich"

In Quantorenschreibweise: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : d(a_n, A) < \varepsilon$

Eine nicht-konvergente Folge heißt <u>divergent</u>.

unser Flächenbeispiel: $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{3}$

weitere Beispiele $a_n = \frac{c}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ (Bem: Folgen mit Grenzwert 0 heißen <u>Nullfolgen</u>)

denn: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Entscheidende Frage: Ab wann ist $d(a_n, 0) < \varepsilon$

d.h. $\left|\frac{c}{n^k} - 0\right| = \frac{|c|}{n^k} < \varepsilon$ sicherlich ab $n^k > \frac{|c|}{\varepsilon}$. Gibt es solche n?

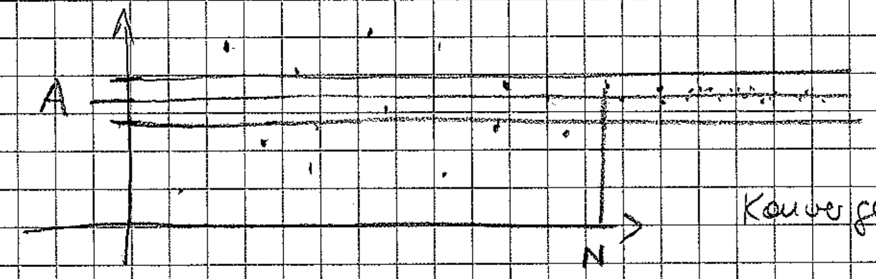
Nach Satz 3.2. ist $\mathbb{N}$ nicht durch $\frac{|c|}{\varepsilon}$ nach oben beschränkt, also gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > \frac{|c|}{\varepsilon}$

also $\frac{|c|}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Außerdem gilt (Induktion!) $\forall n \in \mathbb{N} : n^k \geq n$

d.h. $d\left(\frac{c}{n^k}, 0\right) = \frac{|c|}{n^k} \leq \frac{|c|}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. $\square$

Satz und Def 5.2: Sei (a_n) konvergent. Dann ist (a_n) <u>beschränkt</u>, d.h. es gibt eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Idee



Konvergenz heißt: egal wie schmal der Streifen um A ... ab einem gewissen Index sind alle Folgenglieder im Streifen ... also höchstens <u>endlich</u> viele sind draußen!

Streifenwahl (egal) z.B. $\varepsilon := 1 > 0$.

Da $a_n \to A$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, A) < \varepsilon$ falls $n \geq N_\varepsilon$

d.h. $|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| \leq 1 + |A|$ falls $n \geq N_\varepsilon$

außerdem $|a_n| \leq \max\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}_{\leq N_\varepsilon}\} =: B$ für $n \leq N_\varepsilon$

existiert wegen Satz 3.9

insgesamt $|a_n| \leq \max\{B, 1 + |A|\} =: M$ für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\square}$

Zusammenspiel von Konvergenz und $+, \cdot$

Satz 5.3: Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $a_n \to A$, $b_n \to B$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind (ca_n), $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ konvergent mit $ca_n \to cA$, $a_n + b_n \to A+B$ und $a_n \cdot b_n \longrightarrow A \cdot B$. Ist $A \neq 0$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$ und $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{A}$.

Ist hilfreich bei zusammengesetzten Folgen!

1) $e_n = 1 + \frac{1}{n}$ ... $a_n = 1 \longrightarrow 1$ (Hausaufgabe!)

$b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

also $e_n \to 1 + 0 = 1$

2) $e_n = \dfrac{4n+3}{2n-1} = \dfrac{4 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\left(4 + \frac{3}{n}\right)}_{\substack{\to 4 \\ \text{wie in (1)}}}$ wegen $2 - \frac{1}{n} \to 2$ folgt $\dfrac{1}{2 - \frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$

also $e_n \to \frac{4}{2} = 2$

3) $e_n = \left(\frac{4}{n} + 3\right) \cdot \frac{2n - 1}{n^2 + n - 1} = \left(\frac{4}{n} + 3\right) \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$

$$\lim e_n = \lim\left(\frac{4}{n} + 3\right) \cdot \lim \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3 \cdot \frac{\lim\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right)}{\lim\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = 3 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

hilfreich für den Beweis von Satz 5.3 ist

Lemma 5.4: Äquivalent sind

(i) $a_n \longrightarrow A$

(ii) es gibt ein $C>0$ so dass für jedes $\varepsilon>0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_n, A) \leq C\varepsilon$ für $n \geq N$

(iii) $d(a_n, A) \longrightarrow 0$

(iv) es gibt eine Nullfolge b_n mit $d(a_n, A) \leq b_n$

Beweis: (i) ⇒ (ii) Es gelte $a_n \longrightarrow A$. Sei $\varepsilon > 0$ dann ist $\hat{\varepsilon} := C\varepsilon > 0$

zu $\hat{\varepsilon}$ gibt es nach Def 5.1. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, A) < \hat{\varepsilon}$ für $n \geq N$

also $d(a_n, A) \leq \hat{\varepsilon} = C\varepsilon$ für $n \geq N$.

(ii) ⇒ (i) zu $\varepsilon > 0$ ist $\hat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2C} > 0$ und zu $\hat{\varepsilon}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, A) \leq C\hat{\varepsilon}$ für $n \geq N$

also $d(a_n, A) \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ für $n \geq N$. Nach Def 5.1 gilt $a_n \longrightarrow A$

Rest Übung (■)

Beweis vom Satz 5.3: zu $\varepsilon > 0$ gibt es $N_a \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, A) < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und

$$d(ca_n, cA) = |ca_n - cA| = |c(a_n - A)| = |c|\,|a_n - A| \leq (|c|+1)\,|a_n - A| \leq (|c|+1)\varepsilon \quad \text{für } n \geq N_a$$

Lemma 5.4 zeigt $ca_n \longrightarrow cA$ mit (ii) $\Rightarrow$ (i)

genauso gibt es $N_b \in \mathbb{N}$ mit $d(b_n, B) < \varepsilon$ für $n \geq N_b$ also

$$d(a_n + b_n, A + B) = |a_n + b_n - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq 2\varepsilon \quad \text{für}$$

$n \geq N := \max\{N_a, N_b\}$

Lemma 5.4 zeigt $a_n + b_n \longrightarrow A + B$ mit (ii) $\Rightarrow$ (i)

Nach Satz 5.2. ist $|a_n| \leq M_a$ für alle n also

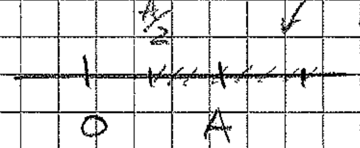
$$d(a_n b_n, AB) = |a_n b_n - AB| = |a_n b_n + \underbrace{a_n B - a_n B}_{0\text{-Trick}} - AB| \leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB|$$

$$= |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \leq M_a\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \leq (M_a + |B|)\,\varepsilon$$

falls $n \geq N$

Lemma 5.4 zeigt $a_n b_n \longrightarrow AB$ mit (ii) $\Rightarrow$ (i)

Ist $A \neq 0$ dann zeigt Def 5.1. mit $\varepsilon := \frac{|A|}{2} > 0$



ab einem bestimmten N sind alle Folgenglieder in $[\frac{A}{2}, \frac{3}{2}A]$

dass ab einem $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ $d(a_n, A) < \frac{|A|}{2}$ gilt

also $|A| = |A - a_n + a_n| \leq |A - a_n| + |a_n|$

d.h. $|a_n| \geq |A| - |A - a_n| \geq |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} > 0$ falls $n \geq \tilde{N}$.

$d\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{A}\right) = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - a_n|}{|a_n A|} \leq \frac{1}{|A|}\frac{2}{|A|}|A_n - a| \leq \frac{2}{A^2}\varepsilon$ falls $n \geq \max\{\tilde{N}, N_a\}$

mit Lemma 5.4 $1/a_n \to 1/A$ mit (ii) $\Rightarrow$ (i) $\boxtimes$

Zusammenspiel mit $|\cdot|$ folgt aus

Lemma 5.5. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Ist (a_n) eine Folge mit $a_n \to A$ dann gilt $|a_n| \to |A|$

Beweis: $|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$

$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |(-1)(x-y)| + |x| = |-1|\,|x-y| + |x| = |x-y| + |x|$

damit $|x| - |y| \leq |x-y|$ und $|x| - |y| \geq -|x-y|$

mit Lemma 5.2: $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ ✓

$a_n \to A$ dann $d(|a_n|, |A|) = \big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| = d(a_n, A) \longrightarrow 0$ mit Lemma 5.4 (i) $\Rightarrow$ (iii)

und damit $|a_n| \to |A|$ mit (iii) $\Rightarrow$ (i) ▨