Lemma 5.6: Ist (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \to A$ und gibt es $C \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq C$ für alle $n \geq N$, dann gilt $A \leq C$.

Entsprechend folgt aus $a_n \geq C$ für alle $n \geq N$ auch $A \geq C$.

Beweis: durch Widerspruch: angenommen $a_n \leq C$ für $n \geq N$ aber $A > C$

dann $\varepsilon := \frac{1}{2}(A - C) > 0$ d.h. $d(a_n, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$

also $C - a_n = C - A + A - a_n < C - A + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(C - A) < 0$ für alle $n \geq N_\varepsilon$

im Widerspruch zu $C - a_n \geq 0$ für alle $n \geq \tilde{N}$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit Übergang von (a_n) zu $(-a_n)$ $\boxtimes$

Kapitel 6: Monotone Folgen

Definition 6.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend) wenn
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$

Satz 6.2: Ist (a_n) monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt dann ist (a_n) konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a(\mathbb{N})$$

Bemerkung: $f: A \to B$, $E \subset A$
dann $f(E) = \{ y \in B \mid y = f(e) \text{ für ein } e \in E \}$

Beweis: es genügt monoton wachsenden Fall zu betrachten (sonst arbeite mit $\tilde{a}_n = -a_n$)

$A := \sup a(\mathbb{N})$ existiert da $a(\mathbb{N})$ nach oben beschränkt

Sei $\varepsilon > 0$ Da $A - \varepsilon$ keine obere Schranke von $a(\mathbb{N})$ existiert $a_N \in a(\mathbb{N})$ mit $a_N > A - \varepsilon$

Für alle $n \geq N$ gilt dann $a_n \geq a_N > A - \varepsilon$

Insgesamt: $-\varepsilon < a_n - A \leq 0 < \varepsilon$ also $d(a_n, A) = |a_n - A| < \varepsilon$ falls $n \geq N$

Lemma 4.2

$\boxtimes$

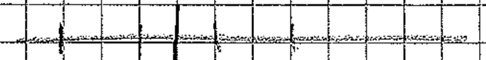
Beispiel: Intervallhalbierungsverfahren

… approximative Lösung von Gleichungen

Aufgabe: finde $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$

Idee: $a_0 := 1 \qquad a_0^2 = 1 < 2$

$b_0 := 2 \qquad b_0^2 = 4 > 2 \qquad I_0 = [a_0, b_0]$



$a_0 = 1 \qquad c_0 \qquad 2 = b_0$

$c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2}$ Intervallmitte $\qquad c_0^2 = \frac{9}{4} > 2 \quad \therefore$ Lösung liegt links

neues Intervall $\quad a_1 := a_0,\ b_1 := c_0 \quad \rightsquigarrow \quad I_1 = [a_1, b_1] \subsetneq I_0$

neue Intervallmitte $\quad c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{5}{4} \quad \rightsquigarrow \quad c_1^2 = \frac{25}{16} < 2 \to a_2 = c_1 ;\ b_2 := b_1$

allgemein: sei $I_n = [a_n, b_n]$ konstruiert für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_n^2 \leq 2$ und $b_n^2 \geq 2$

definiere $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$

Fall $c_n^2 < 2$: setze $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$

Fall $c_n^2 = 2$ setze $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := c_n$

Fall $c_n^2 > 2$ setze $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$

In jedem Fall gilt : $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$

$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ Intervallhalbierung

$a_{n+1}^2 \leq 2$, $b_{n+1}^2 \geq 2$

Damit sind $(a_n), (b_n)$ rekursiv definiert und

$(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend) $(b_n) \searrow$ (monoton fallend)

$a_n \leq b_n \leq b_0$ nach oben $b_n \geq a_n \geq a_0$ nach unten beschränkt

und (per Induktion): $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$

Satz 6.2 $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow A := \sup a(\mathbb{N})$, $b_n \longrightarrow B = \inf b(\mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Lemma 5.4 (iv)}\Rightarrow\text{(i)} : & b_n - a_n \longrightarrow 0 \\ \text{Satz 5.3} & b_n - a_n \longrightarrow B - A \end{array}\right\} \quad B - A = 0 \quad \text{(Grenzwert eindeutig - Hausaufgabe)}$$

definiere $x := A = B$

Satz 5.3 $a_n^2 \longrightarrow A^2 = x^2$, $b_n^2 \longrightarrow B^2 = x^2$

Lemma 5.6. $a_n^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 = A^2 \leq 2$ $b_n^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 = B^2 \geq 2$ also $2 \leq x^2 \leq 2$

Wir haben also mit $x = \sup a(\mathbb{N}) = \inf b(\mathbb{N})$ eine reelle Zahl gefunden mit der Eigenschaft $x^2 = 2$.

x wird durch (a_n) bzw (b_n) beliebig gut approximiert!

$$d(x, a_n) = |x - a_n| \leq x - a_n = \inf b(\mathbb{N}) - a_n \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \overset{\uparrow}{<} \frac{1}{2} 10^{k}$$ (k Stellen Genauigkeit)

(mit Schulwissen erfüllt falls $2^{n-1} > \frac{b_0 - a_0}{10^k}$

bzw falls $n - 1 > \underbrace{\log_2 (\underbrace{b_0 - a_0}_{=1 \text{ im Beispiel}})}_{=0} + k \log_2 10$

also falls $n > 1 + k \underbrace{\log_2 10}_{\approx 3{,}3}$

also falls $n > 34$ ungefähr 10 Stellen genau!)

Mit der gleichen Idee zeigt man: $x^k = b \geq 0$ hat eine in $[0,\infty)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

d.h. $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^k$ ist surjektiv

Mit elementaren Mitteln zeigt man: f ist injektiv (per Induktion $x<y \Rightarrow x^k < y^k$)

insgesamt ist f bijektiv und damit existiert eine inverse Funktion f^{-1}

die auch $\sqrt[k]{\cdot}$ oder $(\cdot)^{1/k}$ genannt wird ... Details Übung

Definition 6.3. Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist k gerade, so bezeichnet $x \mapsto \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ die Inverse zu $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^k$. Ist k ungerade, so bezeichnet $x \mapsto \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ die Inverse zu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$. In beiden Fällen spricht man von der <u>k-ten Wurzel</u>.

<u>Merke</u>: <u>Folgen / Grenzwerte</u> werden benutzt zum Lösen von Gleichungen
(Funktionen invertieren heißt viele Gleichungen lösen)

Weitere Beispiele monotoner Folgen sind Reihen mit positiven Zuwächsen

Definition 6.4. Zu einer Folge (a_n) in einem Körper K betrachtet man die zugehörigen

Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird (unendliche) **Reihe** genannt und mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet (oder kurz $\sum a_k$).

Konvergiert die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so nennt man den Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ Wert der Reihe und bezeichnet ihn (didaktisch unklug) ebenfalls mit dem Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} k$ ist eine divergente Folge mit Folgengliedern $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ ist eine konvergente Folge mit Folgengliedern

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\right) - 1 \underset{\uparrow}{=} \frac{\frac{1}{3^{n+1}} - 1}{\frac{1}{3} - 1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

geometr. Summenformel mit Schnellbeweis:

$$q(1+q+q^2+\dots+q^n) - (1+q+q^2+\dots+q^n) = q^{n+1} - 1$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ auch die Zahl $\frac{1}{2}$

Lemma 6.5. Sei $|q|<1$. Dann gilt für die <u>geometrische Reihe</u> $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Lemma 6.6. Ist (a_n) eine nichtnegative Folge dann ist $\sum a_n$ monoton wachsend

Beweis: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ erfüllt $S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$ $\boxtimes$

Lemma 6.7: (Majorantenkriterium 1)

Sei $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum b_n$ konvergent. Dann ist auch $\sum a_n$ konvergent

($\sum b_n$ heißt <u>Majorante</u> für $\sum a_n$)

Beweis: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq t_n = \sum_{k=1}^{n} b_n \leq \sup t(\mathbb{N}) < \infty$

da t_n beschränkt

(S_n) monoton wachsend und beschränkt ... also konvergent $\boxtimes$

beliebte Majorante: geometrische Reihe

Lemma 6.8: (Quotientenkriterium 1)

Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n+1}/a_n \le q < 1$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert $\sum a_n$

Beweis: $a_{N+1} \le q a_N$, $a_{N+2} \le q a_{N+1} \le q^2 a_N$ ... $a_{N+k} \le q^k a_N$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

mit Lemma 6.5 und 6.7 ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$ konvergent

mit Satz 5.3 auch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, denn für $n \geq N$ gilt

$$s_n = \underbrace{\underbrace{s_N}_{\text{konstante Folge}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-N} a_{N+k}}_{\text{konvergente Folge}}}_{\text{konvergente Folge}}$$

Merke: Bei einer Reihe genügt es, wenn der "hintere Teil" konvergiert.

$\boxed{}$

Wichtige Anwendung: $a_n = \frac{x^n}{n!}$ für $x > 0$ ($\sum \frac{1}{n!} x^n$ ist sog. Potenzreihe)

dann $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \le \frac{1}{2}$ für $n \geq 2x$

also $\sum \frac{1}{n!} x^n$ konvergent für alle $x > 0$

Der Grenzwert wird <u>Exponentialfunktion</u> genannt $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad x \geq 0$

beachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k$ ist die Folge $1,\ 1+0,\ 1+0+0,\ 1+0+0+0, \dots$

also $\exp(0) = 1.$ <u>Merke</u>: Folgen/Grenzwerte werden benutzt zur Konstruktion von Funktionen

weiteres Vergleichsbeispiel (kreativ eingesetzte geometrische Reihe)

Idee $\sum \frac{1}{n^2}$: $1 + \overset{n=2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{9} + \overset{n=2^2}{\frac{1}{16}} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \overset{n=2^3}{\frac{1}{64}} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \frac{1}{144} + \dots + \overset{n=2^4}{\frac{1}{256}} + \dots$

$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \underbrace{\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \dots + \frac{1}{64}}_{2^4 - 2^3 = 2^3(2-1) = 2^3 \text{ Terme der Größe } \frac{1}{64} = \frac{1}{(2^3)^2}} + \frac{1}{256} + \dots$

$\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ geometrische Reihe

sauber $S_n = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l^2}$ hat "Teilfolge" $S_{2^k - 1} \leq \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^l \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

monoton, da Zuwächse positiv und beschränkt

also konvergent

Definition 6.9: Sei X eine Menge und (x_n) eine Folge in X.
Eine Folge (y_n) heißt Teilfolge (TF) von (x_n), wenn eine streng monoton wachsende Folge $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ natürlicher Zahlen existiert, so dass $y_k = x_{m_k}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.

da $m_k = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ streng monoton ist $(s_{2^k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ TF von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lemma 6.10: Eine monotone Folge mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent.

Beweis: Übung

geht das auch mit $\sum \frac{1}{n}$ „harmonische Reihe“ ?

$$\overset{n=2}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \overset{n=2^2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \overset{n=2^3}{\frac{1}{8}} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \overset{n=2^4}{\frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \overset{n=2^5}{\frac{1}{32}} + \frac{1}{33} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3 \text{ Terme der Größe } 2^4 \;\; \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64}$$

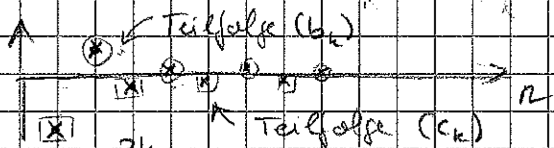
also für $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gilt diesmal $s_{2^m} \geq 1 + (m-1)\frac{1}{2}$ bestimmt divergent

Lemma 6.11: Eine monotone Folge mit einer divergenten Teilfolge ist divergent.

Beweis: Übung

In jeder Folge "steckt" eine monotone Teilfolge

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



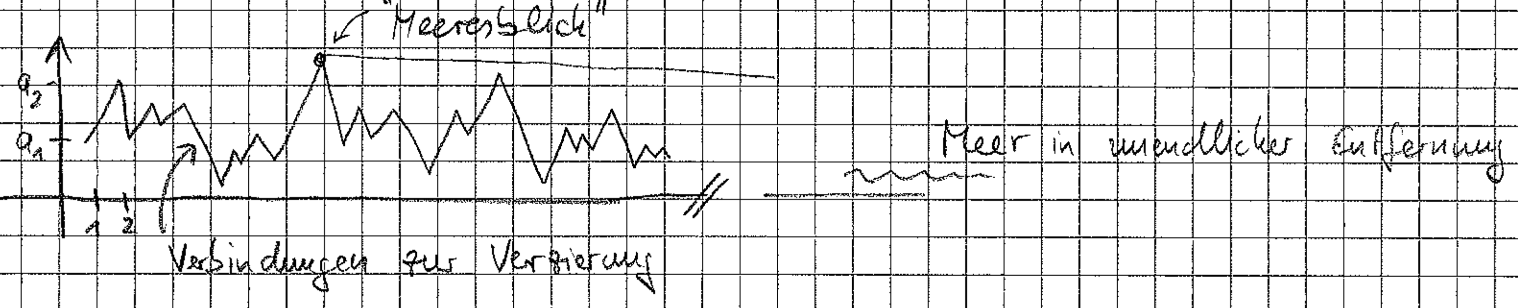
$m_k := 2k \qquad a_{m_k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} = b_k$ fällt monoton gegen 0

$p_k := 2k+1 \qquad a_{p_k} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} = c_k$ wächst monoton gegen 0

Satz 6.12: Jede reelle Folge hat eine monotone Teilfolge

Beweis:

(a_n) Folge



Wir sagen $k \in \mathbb{N}$ hat Meeresblick, wenn $a_k \geq a_n$ für alle $n > k$

Wir sagen $l \in \mathbb{N}$ versperrt k den Blick wenn $l > k$ und $a_l > a_k$

Hilfssatz: k hat Meeresblick genau dann wenn kein $l > k$ den Blick versperrt

Sei $M = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \text{ hat Meeresblick} \}$

Fall $|M| = \infty$: $\quad M_1 = M, \quad m_1 := \min M_1$

$M_{n+1} = M_n \setminus \{m_n\} \quad m_{n+1} := \min M_{n+1} \quad n \geq 1$

Per Konstruktion ist (m_n) streng monoton wachsend (Beweis durch Induktion!)

und m_n hat Meeresblick also $a_{m_{n+1}} \leq a_{m_n}$ d.h. (a_{m_n}) ist <u>monoton fallend</u>

Fall $|M| < \infty$: $\quad m_1 = \max M + 1 > \max M$ hat keinen Meeresblick

$n \geq 1 \quad V_n := \{ l \in \mathbb{N} \mid l \text{ versperrt } m_n \text{ den Blick} \} \neq \emptyset$ da $m_n > \max M$ d.h. $m_n \notin M$

$m_{n+1} := \min V_n > m_n > \max M$

Per Konstruktion ist (m_n) streng monoton wachsend

und m_{n+1} versperrt m_n den Blick also $a_{m_{n+1}} > a_{m_n}$ d.h. (a_{m_n}) streng <u>monoton wachsend</u>

$\boxtimes$

damit

Satz 6.13: (Bolzano - Weierstraß)

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

Beweis: Kombiniere Satz 6.12 mit Satz 6.2. $\blacksquare$