Kapitel 7: Häufungswerte

Definition 7.1: $\bar{x} \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert von (x_n), wenn eine Teilfolge von (x_n) gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Beispiel: $x_n = (-1)^n + 1/n$ hat Häufungswerte -1 und $+1$

Zur Folge $x = (x_n)$ sei $HW(x) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R} \mid \bar{x}$ ist Häufungswert von $x \}$

Satz 7.2 Sei $x = (x_n)$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $x_n \longrightarrow \bar{x}$

(ii) alle TF von (x_n) konvergieren gegen $\bar{x}$

(iii) x ist beschränkt und $HW(x) = \{\bar{x}\}$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei (x_n) konvergent gegen $\bar{x}$ und (x_{m_k}) TF von (x_n)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Da (m_k) streng monoton wachsend, ist $m_k \geq k$ (Beweis durch Induktion)

also $|x_{m_k} - \bar{x}| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ d.h. $x_{m_k} \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : nach Def von $HW(x)$; Da (x_n) TF von (x_n) ist (x_n) konvergent also beschränkt.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Angenommen $x_n \not\to \bar{x}$

Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$ so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n_N \geq N$ existiert

mit $|x_{n_N} - \bar{x}| \geq \varepsilon_0$

Sei $m_1 = n_1$ und $m_k = n_{m_{k-1}+1}$ dann $m_1 < m_2 < \dots$

und $|x_{m_k} - \bar{x}| \geq \varepsilon_0$ und (x_{m_k}) beschränkt

Bolzano Weierstraß zeigt: (x_{m_k}) hat konvergente TF mit Grenzwert $\tilde{x}$

$|\tilde{x} - \bar{x}| = |\lim_{l\to\infty} x_{m_{k_l}} - \bar{x}| = \lim_{l\to\infty} |x_{m_{k_l}} - \bar{x}| \geq \varepsilon_0 > 0$ d.h. $\tilde{x} \neq \bar{x}$

d.h. $HW(x) \neq \{\bar{x}\}$ ↯

$\blacksquare$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt: $x = (x_n)$ beschränkt $\Longrightarrow$ $HW(x) \neq \emptyset$

außerdem gilt $x = (x_n)$ beschränkt $\Longrightarrow$ $HW(x)$ beschränkt (mit Lemma 5.6)

Sogar Lemma 7.3: Ist $x = (x_n)$ beschränkt dann existieren $\min HW(x)$ und $\max HW(x)$

Beweis: Sei $M := \sup HW(x)$ und $n \in \mathbb{N}$

Da $M - \frac{1}{2n}$ keine obere Schranke gibt es $\bar{x}_n \in HW(x)$ mit $M - \frac{1}{2n} < \bar{x}_n \leq M$

zu $\bar{x}$ gibt es TF $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{p_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}_n$

damit gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2n} > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|x_{p_k} - \bar{x}_n| < \frac{1}{2n}$ für alle $k \geq K$

ist $n=1$ definiere $m_1 = p_K$

sonst definiere $m_n = p_{\min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \ell \geq K \text{ und } p_\ell > m_{n-1}\}}$

damit (m_n) streng monoton wachsend und

$$x_{m_n} - M = \underbrace{x_{m_n} - \bar{x}_n}_{\substack{\leq \frac{1}{2n} \\ \geq -\frac{1}{2n}}} + \underbrace{\bar{x}_n - M}_{\substack{\leq 0 \\ \geq -\frac{1}{2n}}}$$

also $-\frac{1}{n} \leq x_{m_n} - M \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}$ d.h. $d(x_{m_n}, M) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d.h. $M \in HW(x)$

Rest folgt mit $\inf HW(x) = -\sup(-HW(x)) \underset{\uparrow\ \text{Hausaufgabe}}{=} -\sup HW(-x) \in -HW(-x) = HW(x)$ $\boxtimes$

Definition 7.4: Sei (x_n) eine beschränkte reelle Folge. Dann nennt man den kleinsten (größten) Häufungswert von (x_n) den Limes-inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ (Limes-superior $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$) der Folge.

beachte: liminf, limsup sind gute Freunde ... im Gegensatz zu lim existieren sie für <u>alle</u> beschränkten Folgen (später erweitert auf alle Folgen)

Grund für Namensgebung:

Lemma 7.5: Sei (x_n) eine beschränkte Folge. Dann ist

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf X(\mathbb{N}_{\geq n})$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup X(\mathbb{N}_{\geq n})$$

Beweis: $b_n := \sup X(\mathbb{N}_{\geq n})$ ist beschränkt durch $\sup X(\mathbb{N})$ und monoton fallend, denn $\mathbb{N}_{\geq n+1} \subset \mathbb{N}_{\geq n}$ also $\underbrace{\sup X(\mathbb{N}_{\geq n})}_{\text{obere Schranke von } X(\mathbb{N}_{\geq n+1})} \geq \overset{\substack{\text{kleinste obere Schranke von } X(\mathbb{N}_{\geq n+1})\\ \downarrow}}{\sup(\mathbb{N}_{\geq n+1})}$

also konvergent.

Sei (x_{m_k}) TF mit $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \max HW(x)$

wegen $x_{m_k} \leq \sup(\mathbb{N}_{\geq m_k}) = b_{m_k}$ Satz 7.2.

ist $\max HW(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} \leq \lim\limits_{k\to\infty} b_{m_k} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

umgekehrt gibt es TF (x_{p_k}) mit $b_{p_{k-1}+1} \geq x_{p_k} \geq b_{p_{k-1}+1} - \frac{1}{k}$

so dass $x_{p_k} - b_{p_{k-1}+1} \longrightarrow 0$

also $\lim x_{p_k} = \lim b_{p_{k-1}+1} + \lim(x_{p_k} - b_{p_{k-1}+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Satz 7.2 Satz 7.2.

d.h. $\max HW(x) \leq \lim b_n \in HW(x) \leq \max HW(x)$ also $\max HW(x) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Konstruktion der TF : zu $b_1 = \sup x(\mathbb{N})$ existiert $x_{p_1} \geq b_1 - 1$

außerdem $b_1 \geq x_{p_1}$

rekursiv weiter : zu $k \geq 2$ existiert $p_k \geq p_{k-1} + 1$ mit $x_{p_k} \geq \sup x(\mathbb{N}_{\geq p_{k-1}+1}) - \frac{1}{k} = b_{p_{k-1}+1} - \frac{1}{k}$

außerdem $b_{p_{k-1}+1} \geq x_{p_k}$

$\blacksquare$

Definiert man $\sup A := +\infty$ ($\inf A := -\infty$) wenn A nach oben (unten) unbeschränkt und $\lim \infty = \infty$, $\lim -\infty = -\infty$, dann erweitert

$$\liminf x_n := \lim_{n\to\infty} \inf x(\mathbb{N}_{\geq n})$$
$$\limsup x_n := \lim_{n\to\infty} \sup x(\mathbb{N}_{\geq n})$$

Definition 7.4 auf beliebige Folgen.