Kapitel 8: Cauchy-Folgen

Wir wissen schon $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ konvergiert für $x \geq 0$

Was ist mit $x < 0$? Vergleiche zwei Partialsummen

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ und s_m mit $m > n$

Dreiecksungleichung für Summen (Induktion!)

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} x^k \right| \overset{\downarrow}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} |x|^k = |t_m - t_n|$$

wobei $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |x|^k$ Partialsumme von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k$ mit Grenzwert $\exp(|x|)$

allgemein gilt:

Lemma 8.1. Ist (t_n) konvergent, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $d(t_m, t_n) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Beweis: Da $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $d(t_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für $n, m \geq N$ gilt also $d(t_n, t_m) = |t_n - t_m| \leq |t_n - u| + |t_m - u| < \varepsilon$ $\boxtimes$

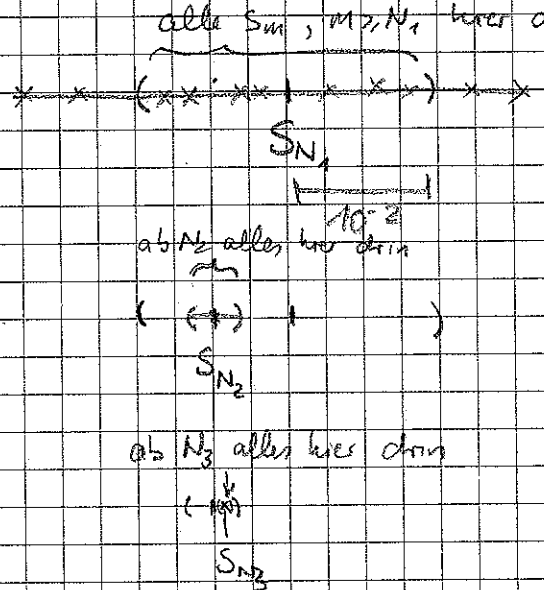
d.h. s_m, s_n liegen beliebig dicht aneinander, wenn m, n genügend groß sind!

Veranschaulichung:

$\varepsilon_1 = 10^{-2} \rightsquigarrow N_1$

$\varepsilon_2 = 10^{-3} \rightsquigarrow N_2$

$\varepsilon_3 = 10^{-4} \rightsquigarrow N_3$



Folge sieht konvergent aus!

<u>aber</u> der Grenzwert ist nicht so offensichtlich, da S_{N_k} sich noch leicht "bewegt"

Solche Folgen nennt man <u>Cauchy-Folgen</u> (CF)

Definition 8.2: Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Satz 8.3: Cauchy-Folgen sind beschränkt

Beweis: Ab $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n - x_m| < 1$

d.h. $|x_k| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|, |x_n| + 1\}$ ▨

Lemma 8.4: Hat eine CF eine konvergente TF so ist sie konvergent

Beweis: Sei (x_n) CF mit konvergenter TF (x_{m_k}) d.h. $x_{m_k} \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}$

Sei $\varepsilon > 0$ Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{m_k}, \bar{x}) < \varepsilon/2$ für $k \geq K$

und $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq \tilde{N}$

Wähle k mit $m_k \geq N$ und sei $n \geq N$ Dann ist

$d(x_n, \bar{x}) \leq |x_n - x_{m_k}| + |x_{m_k} - \bar{x}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ▨

Satz 8.5: Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Lemma 8.1

„$\Longleftarrow$" Sei (x_n) CF. Nach Satz 8.3 ist (x_n) beschränkt.

Mit Bolzano-Weierstraß existiert konvergente TF

Nach Lemma 8.4. ist (x_n) konvergent $\boxtimes$

Bei Reihen $\sum a_k$ ergibt dies das Cauchy-Konvergenzkriterium

Satz 8.6: Eine Reihe $\sum a_k$ ist konvergent genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$ gilt für alle $m \geq n \geq N$.

Beweis: Satz 8.5 angewendet auf Folge der Partialsummen $\boxtimes$

$\sum \frac{1}{k!} x^k$ erfüllt Konvergenzkriterium für jedes $x \in \mathbb{R}$ d.h. $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ sinnvoll für alle $x \in \mathbb{R}$