Kapitel 9: Reihen

und die Beweisstrategie lässt sich verallgemeinern!

Definition 9.1 $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_n|$ konvergent ist.

Satz 9.2: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweisidee: $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$ ... mit Satz 8.6 folgt Konvergenz $\square$

da $\sum |a_k|$ konvergent (also CF) Satz 8.6

Beachte: $\sum |a_n|$ monoton wachsende Folge ... hier gibt's gute Konvergenzkriterien (Kapitel 6)

z.B. Majoranten/Minorantenkriterium

Definition 9.3: $\sum c_n$ heißt Majorante für $\sum a_n$, falls $|a_n| \leq c_n$

bzw. Minorante, falls $c_n \leq a_n$ für alle n.

Satz 9.4: Hat $\sum a_n$ eine konvergente Majorante, so konvergiert $\sum a_n$ (Majorantenkriterium)

Hat $\sum a_n$ eine Minorante, die bestimmt nach $+\infty$ divergiert, so gilt $\sum a_n = \infty$

(Minorantenkriterium)

Zum Beweis wird Definition der <u>bestimmten Divergenz</u> benötigt (siehe Übung)

Definition 9.5: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent, wenn zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \geq M$ $(a_n \leq -M)$ für alle $n \geq N$.

In Symbolen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

Beweis: Majorantenkriterium: Lemma 6.7 + Satz 9.2.

Minorantenkriterium: Sei $\sum c_n$ Minorante von $\sum a_n$ mit $\sum c_n = \infty$

Zu $M \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \geq M$ für alle $n \geq N$ (Def 9.5)

Dann $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \geq M$ für alle $n \geq N$ also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \infty$ (Def 9.5) $\boxtimes$

wichtige Minorante: $\sum \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe) z.B. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ also $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent

allgemeiner $\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \geq \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ also $\sum \frac{1}{n^p}$ divergent weiterer Divergenzcheck:

Satz 9.6: Ist $\sum a_n$ konvergent dann ist (a_n) eine Nullfolge (d.h. $\lim a_n = 0$)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Das Cauchy-Kriterium liefert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq N. \text{ Mit } m = n \text{ folgt } |a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

$\boxtimes$

Beachte: Negation von $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$

also ist (a_n) keine NF dann divergiert $\sum a_n$ stimmt immer!

Die Umkehrung $B \Rightarrow A$ ist dagegen <u>falsch</u> denn $(\frac{1}{n})$ ist NF aber $\sum \frac{1}{n}$ divergent wichtige Majorante: $\sum q^n$ $0 \le q < 1$ (geometrische Reihe)

Satz 8.7. (Wurzelkriterium)
Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$. Die Reihe $\sum a_n$
(i) konvergiert absolut, wenn $\alpha < 1$
(ii) divergiert, wenn $\alpha > 1$
(iii) kann konvergieren oder divergieren, wenn $\alpha = 1$.

Beweis:
(i) wenn $\limsup |a_n|^{1/n} = \alpha < 1$ dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n|^{1/n} \le q = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ für alle $n \ge N$
(Beweis Übungen)
damit $|a_n| \le q^n$ für $n \ge N$
wie im Beweis von Lemma 6.8 folgt $\sum |a_n|$ konvergent also $\sum a_n$ absolut konv.

(ii) Sei $x := (|a_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $\limsup |a_n|^{1/n} = \max HW(x) = \alpha > 1$
Dann gibt es TF $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \longrightarrow \alpha$ also $x_{n_k} \ge \frac{1+\alpha}{2} > 1$ für alle k
ab einem gewissen Index $K \in \mathbb{N}$. Dann auch $|a_{n_k}| = x_{n_k}^{n_k} > 1$ also $a_{n_k} \not\to 0$

Damit ist (a_n) keine NF also $\sum a_n$ divergent.

(iii) hier genügen zwei Beispiele

$a_n = 1$ $\quad \limsup |a_n|^{1/n} = 1$ und $\sum a_n$ divergent da (a_n) keine NF

$a_n = 1/n^2$ $\quad \limsup |a_n|^{1/n} = 1$ und $\sum a_n$ konvergent

benutzt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \Rightarrow 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$

beweisbar mit <u>Bernoulli - Ungleichung</u>: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$ (Induktion!)

benutzt als Zwischenschritt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c > 0$ (auch mit Bernoulli Ungleichung)

$\boxtimes$

Satz 9.8 (Quotientenkriterium)

Eine Reihe $\sum a_n$ mit $a_n \neq 0$

(i) konvergiert absolut, wenn $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) divergiert, wenn $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

(iii) kann konvergieren oder divergieren, wenn $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Beweis: beruht auf Satz 8.13 und

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{(Übung)} \quad \boxtimes$$

Ungleichungskette zeigt: Wurzelkriterium ist schärfer als Quotientenkriterium.

Das Wurzelkriterium spielt wichtige Rolle bei Potenzreihen

also Reihen $\sum b_n$ mit $b_n = a_n(x-\bar{x})^n$

beachte: $|b_n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}\,|x-\bar{x}|$ d.h. $1 > \limsup |b_n|^{1/n} = |x-\bar{x}| \limsup |a_n|^{1/n}$

$$\Leftrightarrow \quad |x-\bar{x}| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \underset{\uparrow}{r_a} \quad \left(\text{mit Konvention } \frac{1}{0} := \infty, \ \frac{1}{\infty} := 0\right)$$

sog. Konvergenzradius

Satz 9.9. Die Potenzreihe $\sum a_n(x-\bar{x})^n$ ist absolut konvergent für jedes x im Intervall $(\bar{x}-r_a, \bar{x}+r_a)$ mit $r_a := 1/\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ und divergent für $|x-\bar{x}| > r_a$.

Das Produkt von Potenzreihen ...

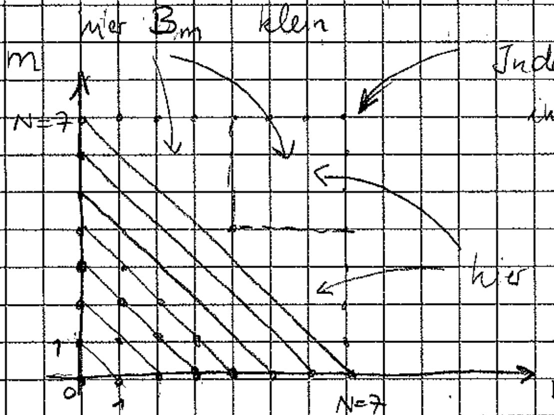
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n x^n}_{A_n} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{b_m x^m}_{B_m} = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \sum_{m=0}^{N} b_m x^m}$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N)(b_0 + b_1 x + \dots + b_N x^N)$$

$$= \overbrace{a_0 b_0}^{=:c_0} + \overbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}^{=:c_1} x + \overbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}^{=:c_2} x^2 + \dots + \underbrace{\overbrace{(a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \dots + a_N b_0)}^{=:c_N} x^N}_{=:C_N}$$

$$+ (a_1 b_N + \dots + a_N b_1) x^{N+1} + \dots + a_N b_N x^{2N}$$

die Indexraum-darstellung



schon klar

$$\sum_{n=1}^{N} |C_n| \le \sum_{n=1}^{N} |A_n| \sum_{m=1}^{N} |B_m| \le K$$

Dreiecksungl.

wegen abs. Konvergenz der Reihen

motiviert: $$\left| \sum_{n=1}^{N} A_n \sum_{m=1}^{N} B_m - \sum_{n=1}^{N} C_n \right| \le \sum_{n=1}^{N} |A_n| \overbrace{\sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor}^{N} |B_m|} + \overbrace{\sum_{n=\lfloor N/2 \rfloor}^{N} |A_n|} \sum_{m=1}^{N} |B_m|$$

wird bel. klein für N groß

größte ganze Zahl $\le \frac{N}{2}$

$\leadsto \sum C_n$ abs konv.

Satz und Definition 9.10: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ zwei Reihen. Die durch $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$ definierte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ heißt das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum A_n$ und $\sum B_n$.
Sind die Ausgangsreihen absolut konvergent dann auch das Cauchy-Produkt und es gilt

$$\sum A_n \sum B_n = \sum C_n$$

Angewendet auf Exponentialreihe:

$A_n = \frac{1}{n!}x^n$, $B_m = \frac{1}{m!}y^m$ $\quad A_k B_{n-k} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}x^k y^{n-k}$ also $\quad C_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$

$$= \frac{1}{n!}(x+y)^n \qquad \text{binomischer Satz (Übungen)}$$

also $\boxed{\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)}$

die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Zum Abschluss noch einige Ergebnisse zu nicht-absolut konvergenten Reihen:

Satz 9.11 (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)
Sei (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ und $\lim a_n = 0$.
Dann konvergiert $\sum (-1)^n a_n$

Beweis: beruht auf Cauchy-Kriterium ... untersuche

$$\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k\right| = |\underbrace{a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \dots \pm a_n}_{A}|$$

$\pm$ je nachdem ob $(n-m)$ gerade/ungerade

1) $n-m$ ungerade

$$A = \underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m+2} - a_{m+3}}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_{n-1} - a_n}_{\geq 0} \geq 0$$

$$A = a_m \underbrace{- a_{m+1} + a_{m+2}}_{\leq 0} \underbrace{- a_{m+3} + a_{m+4}}_{\leq 0} \dots \underbrace{- a_{n-2} + a_{n-1}}_{\leq 0} \underbrace{- a_n}_{\leq 0} \leq a_m$$

2) $n-m$ gerade

$$A = \underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\geq} + \dots + \underbrace{a_{n-2} - a_{n-1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_n}_{\geq 0} \geq 0$$

$$A = a_m \underbrace{- a_{m+1} + a_{n-2}}_{\leq 0} \dots \underbrace{- a_{n-1} + a_n}_{\leq 0} \leq a_m$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_m \to 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m| < \varepsilon$ falls $m \geq N$ also

$$\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k\right| \leq a_m < \varepsilon$$

falls $n \geq m \geq N$

☑

Damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent (aber nicht absolut konvergent)

genauso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n}}$ konvergent (— " —) für jedes $p \in \mathbb{N}$

<u>Achtung</u>: nicht absolut konvergente Reihen verhalten sich merkwürdig bei <u>Umsortieren</u>

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt umsortierte Reihe zu $\sum a_n$ wenn es eine bijektive Abbildung $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $b_n = a_{\tau(n)}$.

Für absolut konvergente Reihen gilt: jede Umsortierung konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert

Für nicht absolut konvergente Reihen gilt: zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umsortierung, mit Grenzwert c.

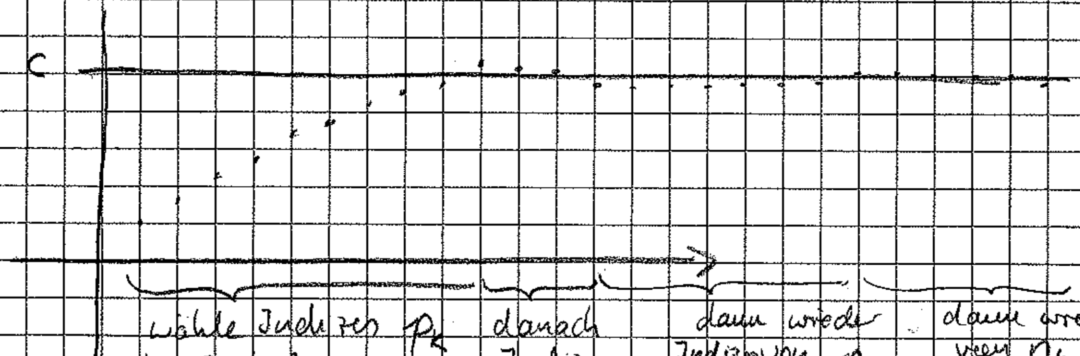
Woran liegt das?

$\sum a_n$ konvergent aber nicht absolut konvergent.

d.h. $a_n \to 0$ Vorzeichen von a_n muss immer wieder wechseln

Es gibt Teilfolgen $(a_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ positiv $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ negativ und $\sum a_{p_k} = +\infty$, $\sum a_{n_k} = -\infty$

wäre eine Reihe konvergent müsste andere auch konvergent sein, da $\sum a_n$ konvergiert; das würde aber absolute Konvergenz bedeuten ↯



wähle Indizes p_k bis Partialsumme C zum ersten mal übersteigt | danach Indizes n_k bis C zum ersten Mal wieder unterschritten wird | dann wieder Indizes von p_k | dann wieder von n_k

Konstruktion von τ

da $\sum a_{p_k} = +\infty$, $\sum a_{n_k} = -\infty$ schafft man die Über/Unterschreitung immer wieder

Zusammenfassung (Folgen):

- treten auf bei Approximationen (Flächen-/Längenberechnung, Gleichungen lösen, (Intervallhalbierung), Inversion von Funktionen
- Definieren neue Funktionen (Potenzreihen!)
- treten auf bei der Modellierung diskreter dynamischer Prozesse: n Nummer des Zeitschritts

z.B. Zinseszins

S_0 Kapital zum Zeitpunkt $t=0$

$S_1 = S_0(1+p)$ — " — $t_1 = 1$ Jahr $\quad p$ Zinssatz

$S_2 = S_1(1+p)$ — " — $t_2 = 2$ Jahre

$\vdots$

$S_{n+1} = S_n(1+p) = S_0(1+p)^n$

rekursive Folge $\quad$ mit Def "Potenz"

z.B. Kontinuierliche Verzinsung (wg. Zinseszinseffekt)

$V_1 = S_0(1+p)$ $\quad$ 1 Verzinsung pro Jahr mit p

besser: $V_2 = S_0(1+\frac{p}{2})^2$ $\quad$ 2 Verzinsungen pro Jahr mit $p/2$

besser: $V_3 = S_0(1+\frac{p}{3})^3$ $\quad$ 3 — " — $p/3$

$\vdots$

$V_n = S_0(1+\frac{p}{n})^n$ $\quad$ gibt es $\lim_{n\to\infty} V_n$??

Antwort: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \exp(p)$

... mit binom. Satz oder einfacher mit Satz von l'Hospital (später)

- Kontostand bei täglicher Verzinsung mit Ein-/Auszahlung

$$S_{n+1} = S_n(\underbrace{1+p}_{\text{verzinst}}) + D_n$$

S_{n+1}: Stand nächster Tag 12:00 Uhr

S_n: Stand vorheriger Tag 12:00

D_n: Ein-/Auszahlungen (≥ 0 / < 0) zwischen Verzinsungspunkten

rekursive Folge

- Populationsdynamik: x_n Anzahl Kaninchenpärchen nach n Monaten

Annahme: a) nach einem Monat werden Kaninchen fortpflanzungsfähig

b) nach jedem Monat erzeugt fortpfl.fähiges Pärchen ein neues Kaninchenpärchen.

$x_0 = 1$ (neues Pärchen (im Laden gekauft)), $x_1 = 1$ (jetzt fortpfl.fähig), $x_2 = 2$ (erster Nachwuchs), $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 8$, ...,

Regel: $\underbrace{x_{n+1}}_{\text{neue K.}} = \underbrace{x_n}_{\text{alte Kan}} + \underbrace{x_{n-1}}_{\text{Neugeborene (von den fortpfl.fähigen)}}$

„Fibonacci Folge" rekursiv!

$x_{12} = 233$

- rekursive Folgen sind am spannendsten! (= am schwierigsten zu untersuchen)

für gewisse (einfache Typen) gibt es Konvergenzkriterien ...

$x_{n+1} = a \cdot x_n$ ... Potenz

$x_{n+1} = x_n + a_n$ Reihen

$x_{n+1} = \Phi(x_n)$ Fixpunktiteration

- explizite Folgen sind manchmal langweilig

$x_n = \dfrac{3n^2 - 4}{2n^2 + 2}$ ... Grenzwertsätze

direkt aus n berechenbar

manchmal etwas spannender (weil langweilige Folge mit einer "Formel" zu neuer Folge wird)

$y_n = \exp(\sin(x_n)) + x_n$ ... Stetigkeit

manchmal noch spannender (Tauziehen)

$z_n = \sqrt[n]{n}$ ... Satz von l'Hospital (Differenzierbarkeit)

zieht nach 1

zieht nach ∞