Kapitel 10: Stetigkeit

zentrales Thema: wann vertauscht lim mit Funktionsauswertung

d.h. $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

sehr nützlich, wenn x_n einfach (z.B. $x_n = 1/n$) aber $f(x_n)$ kompliziert, d.h. $\lim f(x_n)$ unklar

erlaubt f Vertauschung ("ist f stetig") dann ist Grenzwert <u>einfach</u>: $f(\lim x_n)$!

Definition 10.1: Sei $D \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in D (in Symbolen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$) falls $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 10.2: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in D$. Die Funktion f heißt <u>stetig in $\bar{x}$</u>, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \bar{x}$ gilt $f(x_n) \to f(\bar{x})$.

Ist f stetig für jedes $\bar{x} \in D$, nennen wir f stetig.

Die Menge der stetigen Funktionen auf D wird mit $C^0(D, \mathbb{R})$ bzw. kurz mit $C^0(D)$ bezeichnet.

Große Frage: Welche Funktionen sind stetig?

- konstante Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ sind stetig: sei $(x_n) \subset D$, $x_n \to \bar{x} \in D$.
  $f(x_n) = c \xrightarrow[n\to\infty]{} c = f(\bar{x})$ ✓

- Identitätsfunktion $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist stetig:

  sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \bar{x} \in D$. Dann: $f(x_n) = x_n \longrightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$ ✓

- Polynome $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

  Identitätsfkt

  konstante Funktionen

  Produkte von Identitätsfunktionen

  Polynom ist Summe von Produkten von stetigen Funktionen ... damit stetig (s. u.)

- rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit } x \in D = \{ y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \neq 0 \}$$

Quotient von stetigen Funktionen ... damit stetig (s. u.)

Satz 10.3: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\bar{x} \in D$.

Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ stetig in $\bar{x}$

Ist $g(\bar{x}) \neq 0$ dann ist auch $f/g : D' \to \mathbb{R}$ stetig in $\bar{x}$

mit $D' = \{ x \in D \mid g(x) \neq 0 \}$.

Wir benutzen hierbei die wichtigen Definitionen von punktweisen Funktionsverknüpfungen:

$$\underbrace{f+g}_{\text{Name einer neuen Fkt}} : \underbrace{D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x)}_{\text{die hiermit definiert wird}}$$

$$\underbrace{f \cdot g}_{\text{Name}} : D \to \mathbb{R},\ \underbrace{x \mapsto f(x) \cdot g(x)}_{\text{Definition}}$$

$$\underbrace{f/g}_{\text{Name}} : D' \to \mathbb{R},\ \underbrace{x \mapsto f(x)/g(x)}_{\text{Definition}}$$

Beweis: Def. 10.2 mit Grenzwertsätzen (Satz 5.3) ☑

weiterer Baustein: $abs : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig

Sei $(x_n) \subset D$, $x_n \to \bar{x}$ dann $abs(x_n) = |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\bar{x}| = abs(\bar{x})$

↖ Satz ...

Was ist mit $|1+2x^2| = \text{abs}(\underbrace{P(x)}_{1+2x^2 \text{ Polynom}})$ oder $P(\text{abs}(x))$?

Definition 10.4: Seien $f: C \to D$, $g: A \to B$ Abbildungen mit $g(A) \subset C$.
Dann ist die Verkettung $f \circ g$ (lies "f nach g")
definiert durch

$$f \circ g : A \to C, \quad x \mapsto f(g(x))$$

Satz 10.5: Sei $g: D \to \mathbb{R}$ stetig in $\bar{x}$ mit $g(D) \subset E$ und
$f: E \to \mathbb{R}$ stetig in $g(\bar{x})$. Dann ist $f \circ g$ stetig in $\bar{x}$.

Beweis: Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \bar{x}$

Dann $(g(x_n)) \subset E$ mit $g(x_n) \to g(\bar{x})$ (da g stetig und $g(D) \subset E$)

Dann $f(g(x_n)) \to f(g(\bar{x}))$ (da f stetig)

also $(f \circ g)(x_n) \underset{\text{def}}{=} f(g(x_n)) \to f(g(\bar{x})) = (f \circ g)(\bar{x})$ d.h. $f \circ g$ stetig $\blacksquare$

schwieriger: Ist exp stetig ?

weil Vertauschung von Grenzwerten zu prüfen ist

$$\lim_{m\to\infty} \exp(x_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x_m^n$$

$$??\qquad \|$$

$$\exp(\lim_{m\to\infty} x_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\lim_{m\to\infty} x_m)^n \underset{\substack{\text{Polynome} \\ \text{sind stetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x_m^n$$

Wir betrachten $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\bar{x})^k$ mit Konvergenzradius $r_a > 0$.

und versuchen abzuschätzen $|F(x) - F(y)| \leq L\,|x-y|$ für alle $x, y \in [\bar{x}-R, \bar{x}+R]$ mit $R < r_a$

Definition 10.6: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ gilt.

Lemma 10.7: Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Lip-stetig mit Lip-Konstante L.

Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \bar{x} \in D$.

Dann $d(f(x_n), f(\bar{x})) = |f(x_n) - f(\bar{x})| \leq L|x_n - \bar{x}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

also $f(x_n) \to f(\bar{x})$ $\blacksquare$

Beispiele: $f(x) = ax + b$ ist Lip-stetig auf $\mathbb{R}$

$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a||x-y|$ Lip-Konstante $|a|$.

$f(x) = x^n$ ist Lip-stetig auf $[-R, R]$ mit Lip-Konstante nR^{n-1}

IA klar, IS $|x^{n+1} - y^{n+1}| = |x^n x - y^n x + y^n x - y^n y| \leq |x||x^n - y^n| + |y|^n |x-y|$

$\leq R\, n R^{n-1}|x-y| + R^n|x-y| = (n+1)R^n|x-y|$

Verkettung Lip-stetiger Fkt ist Lip-stetig mit Lip-Konstante:

$$|f\circ g(x) - f\circ g(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| \le L_f\,|g(x)-g(y)| \le \underbrace{L_f L_g}_{L_{f\circ g}}\,|x-y|$$

damit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\bar{x})^k \quad \text{Lip-stetig auf } [\bar{x}-R, \bar{x}+R] \quad R<r_a$$

wenn $\quad G(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \cdot R^k}_{b_k}\, y^k \quad$ Lip stetig auf $[-1,1]$

denn $\quad F(x) = G(\underbrace{R^{-1}(x-\bar{x})}_{\text{Lip stetig}})$

beachte: $\quad \limsup |b_k|^{1/k} = \limsup |a_k|^{1/k}\cdot R = \frac{1}{r_a} R < 1 \quad$ also $r_b > 1$

$$|G(x) - G(y)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n} b_k (x^k - y^k)\right|}$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} |b_k|\,|x^k - y^k| \underset{\substack{\uparrow \\ x,y\in[-1,1]}}{\le} \sum_{k=0}^{n} |b_k|\, k\, 1^{k-1}\,|x-y| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\, k\right)|x-y|$$

wegen $\lim \sqrt[k]{k} = 1$ ist $\limsup |b_k|^{1/k} k^{1/k} = \limsup |b_k|^{1/k} < 1$

also $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| k =: L \in \mathbb{R}$. d.h. G ist Lip-stetig auf $[-1, 1]$

und damit F auf $[\bar{x}-R, \bar{x}+R]$

Satz 10.8: Sei $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\bar{x})^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r_a > 0$.

Dann ist F auf jedem Intervall $[\bar{x}-R, \bar{x}+R]$ mit $R < r_a$

Lipschitzstetig und damit stetig auf $D = (\bar{x}-r_a, \bar{x}+r_a)$.

Beweis: Lip-stetigkeit s.o.

Sei $(x_n) \subset D$, $x_n \to a \in D$.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \min\{\frac{r_a - a}{2}, 1\}$

und damit $|x_n - \bar{x}| \leq \max\{|x_1 - \bar{x}|, \ldots, |x_N - \bar{x}|, \frac{r_a + a}{2}\} =: R < r_a$

Da F Lip-stetig auf $[\bar{x}-R, \bar{x}+R]$ folgt $F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(\bar{x})$ $\square$

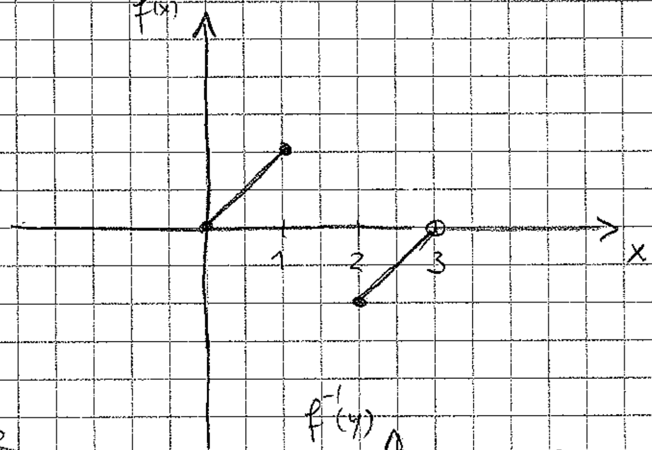
Also: exp, sin, cos, sinh, cosh sind stetig.

bleibt noch: Inverse von stetigen Funktionen stetig?

nicht immer ...

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x-3 & x \in [2,3) \end{cases}$$

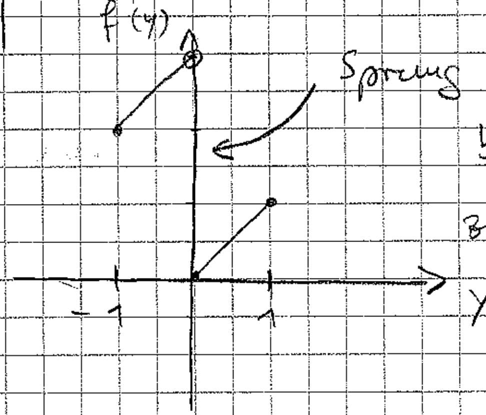
$x \in D = [0,1] \cup [2,3)$



ist stetig ... Nachweis Hausaufgabe
und invertierbar:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+3 & -1 \leq y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

mit $y \in [-1, 1]$



Sprung an Stelle 0

bedeutet <u>Unstetigkeit</u>!

zum Nachweis genügt
<u>eine</u> problematische Folge
im Def bereich

$$f^{-1}(-1/n) = -1/n + 3 \to 3 \underset{\overset{\Vert}{f^{-1}(0) = 0}}{\overset{!!}{\neq}} f^{-1}(\lim -1/n)$$

denn Stetigkeit verlangt

$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

für <u>alle</u> konvergente Folgen im Def bereich liegt am Definitionsgebiet von f ...

Satz 10.9. Sei $f : [a,b] \to W \subset \mathbb{R}$ invertierbar. Ist f stetig in $\bar{x}$ dann ist die Inverse f^{-1} stetig in $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Beweis: Sei $(y_n) \subset W$ mit $y_n \longrightarrow \bar{y}$

$x_n := f^{-1}(y_n) \in [a,b]$ ist beschränkte Folge

Sei $u \in HW((x_n))$ d.h. $u = \lim x_{n_k}$ für eine TF

dann $f(u) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = \bar{y}$

also $f(HW((x_n))) = \{\bar{y}\}$

damit $HW((x_n)) = f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \{f^{-1}(\bar{y})\}$

also $f^{-1}(y_n) = x_n \longrightarrow f^{-1}(\bar{y})$ d.h. f^{-1} ist stetig ∎

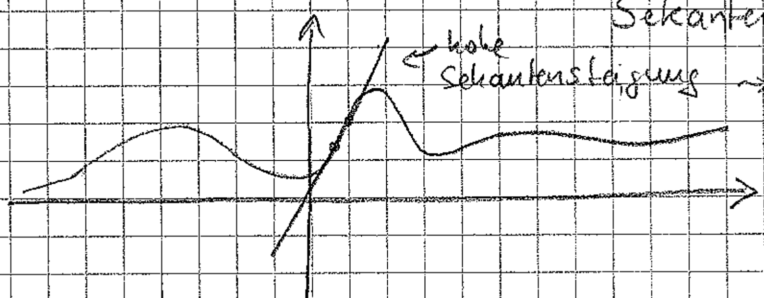
damit $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ stetig auf $[0,R]$ (bzw $[-R,R]$ für n ungerade) für jedes $R > 0$

wie im Beweis von Satz 10.8 folgt Stetigkeit auf $[0,\infty)$ bzw $(-\infty,\infty)$.

Stetigkeit / Unstetigkeit graphisch

Spezialfall: Lipschitzstetigkeit (global) $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L$

Sekantensteigung beschränkt



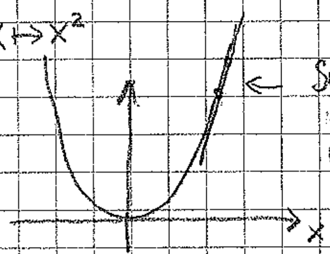
← hohe Sekantensteigung → große Lip-Konstante

außerdem sieht man: Funktionswerte beliebig nahe aneinander: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

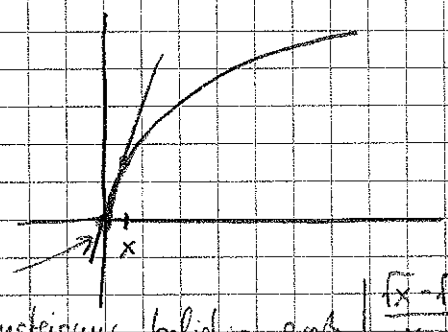
falls Argumente nahe genug aneinander: $|x-y| < \delta := \varepsilon/L$

nicht alle stetigen Funktionen sind Lip-stetig:

$x \mapsto x^2$



← Sekantensteigung nur beschränkt, wenn Argumente beschränkt: $\left|\frac{x^2-y^2}{x-y}\right| = |x+y|$



hier Sekantensteigung beliebig groß $\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}$

allgemein

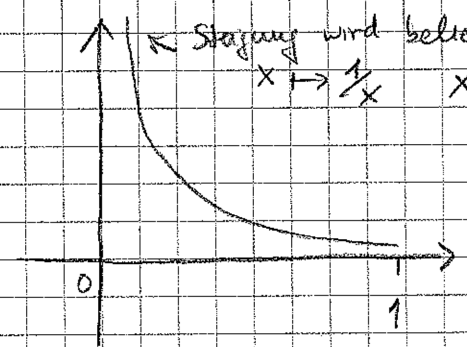
$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

falls $x, y \geq c$

aber viele stetige Funktionen sind lokal Lip-stetig d.h.

Definition 10.10: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt lokal Lip-stetig falls zu jedem $\bar{x} \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f|_{D \cap (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)}$ Lip-stetig ist.

Beispiel



← Steigung wird beliebig groß, bleibt aber auf allen Intervallen endlich, die Abstand zur Null halten

$x \mapsto 1/x \quad x \in (0,1] = D$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| \leq \frac{1}{c^2}|x-y| \quad \text{für } x,y \geq c > 0$$

$\bar{x} \in D$ erfüllt $\bar{x} > 0$ also $\delta = \frac{\bar{x}}{2} > 0$

und für $x,y \in D' = D \cap (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ gilt $x,y \geq \frac{\bar{x}}{2}$

also $f|_{D'}$ Lip-stetig mit Lip-Konstante $\frac{4}{\bar{x}^2}$

wieder, Fktwerte beliebig nahe $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

wenn Argumente nahe genug $|x - \bar{x}| < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{L_{\bar{x}}}\}$

lokale Lip-Konstante von f

aber nicht alle stetigen Fkt lok. Lip-stetig (z.B. $x \mapsto \sqrt{x}$ bei $\bar{x} = 0$ nicht Lip stetig).

Es gilt aber immer bei stetigen Fkt: Fktwerte beliebig nahe, wenn Argumente nahe genug

Satz 10.11: (ε-δ Beschreibung der Stetigkeit)

$f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{x} \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{\varepsilon,\bar{x}} > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ gilt wenn $|x - \bar{x}| < \delta_{\varepsilon,\bar{x}}$ für $x \in D$ ist.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \bar{x} \in D$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta_{\varepsilon,\bar{x}} > 0$ mit $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ falls $|x_n - \bar{x}| < \delta_{\varepsilon,\bar{x}}$

zu $\delta_{\varepsilon,\bar{x}} > 0$ existiert wiederum $N_{\delta_{\varepsilon,\bar{x}}} \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - \bar{x}| < \delta_{\varepsilon,\bar{x}}$ für alle $n \geq N_{\delta_{\varepsilon,\bar{x}}}$

Damit $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\delta_{\varepsilon,\bar{x}}}$ d.h. nach Def $f(x_n) \to f(\bar{x})$

also ist f stetig in $\bar{x}$

„$\Rightarrow$" Durch Widerspruch: Sei f stetig in $\bar{x}$ und $\neg\,(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) : |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

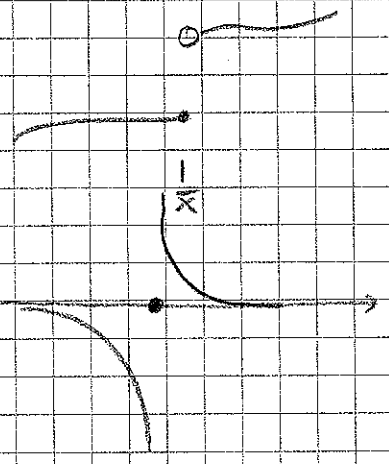
also $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists\, x \in D \cap (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) : |f(x) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon$

zu $\delta_n = 1/n$ gibt es also $x_n \in D \cap (\bar{x} - 1/n, \bar{x} + 1/n)$ mit $|f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon > 0$

d.h. $x_n \longrightarrow \bar{x}$ aber $f(x_n) \not\longrightarrow f(\bar{x})$ ↯ zur Stetigkeit von f ☒

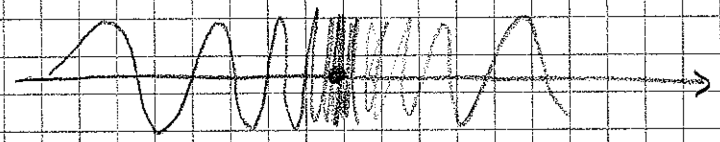
Gründe für Unstetigkeit:

Sprünge — endlich / unendlich



Fktwerte nicht unbedingt beliebig nahe
wenn Argumente sehr nahe beieinander

wilde Oszillationen:



$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

bei $\bar{x} = 0$: Fktwerte nicht unbedingt nahe
wenn Argumente sehr nahe beieinander