Kapitel 11: Eigenschaften stetiger Funktionen

stetige Funktionen machen keine Sprünge ... lassen keine Zwischenwerte aus.

Satz 11.1: Eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Sei $f(a) \leq y \leq f(b)$ (im Fall $f(b) < f(a)$ arbeite mit $-f$)

Konstruiere Folge $a_n \uparrow p$, $b_n \downarrow p$ von Intervallgrenzen wie in Kapitel 6 mit Intervallhalbierungsverfahren, wobei

neues Kriterium		Kriterium in Kap 6
$f(c_n) > y$	statt	$c_n^2 > 2$
$f(c_n) < y$	statt	$c_n^2 < 2$
$f(c_n) = y$	statt	$c_n^2 = 2$

$$y \leq \lim f(b_n) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} f(p) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim f(a_n) \leq y \qquad \blacksquare$$

insbesondere: Intervallhalbierung universell einsetzbar zum Lösen von Gleichungen $f(x) = y$ wenn f stetig

Typische Anwendung: Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \qquad a_k \neq 0 \qquad k \text{ ungerade}$$

betrachte
$$\frac{1}{a_k} P(n) = n^k \underbrace{\underbrace{\left(\frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + 1 \right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}}_{\text{insbes. } \geq \frac{1}{2} \text{ für } n \geq N_+}$$

genauso
$$\frac{1}{a_k} P(-n) = -n^k \underbrace{\left(\frac{a_0}{a_k (-n)^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k(-n)} + 1 \right)}_{\geq \frac{1}{2} \text{ für } n \geq N_-}$$

mit $N = \max\{N_+, N_-\}$ und $f(x) = P(x)/a_k$, $a = -N$, $b = +N$

ist f stetig auf $\mathbb{R}$ und $f(a) < 0 < f(b)$ also $f(p) = 0$ für ein $p \in [a,b]$ d.h. $P(p) = 0$.

... stetige Funktionen haben auf beschränkten und abgeschlossenen Mengen Max. und Min.

Definition 11.2: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u> (nach oben / nach unten), wenn die Menge $f(D)$ beschränkt (nach oben / nach unten) ist.
f hat ein Maximum bzw Minimum falls $f(D)$ ein Maximum bzw ein Minimum hat.

Definition 11.3: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n) \subset A$ auch $\lim x_n \in A$ gilt.
wichtiges Beispiel $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ $(a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq \lim x_n \leq b$ also $\lim x_n \in A$

Satz 11.4 Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig dann ist f beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es $y_n \in f(D)$ mit $\sup f(D) - \frac{1}{n} < y_n \leq \sup f(D)$
bzw mit $n < y_n$ falls $\sup f(D) = \infty$

In jedem Fall $\lim y_n = \sup f(D)$

Da $y_n \in f(D)$ gibt es $x_n \in D$ mit $y_n = f(x_n)$

Da D beschränkt gibt es konvergente TF $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset D$

Da D abgeschlossen $\bar{x} = \lim x_{n_k} \in D$

Da f stetig ist $\sup f(D) = \lim y_n = \lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \in f(D) \subset \mathbb{R}$

also $\sup f(D) < \infty$ und $\max f(D)$ existiert, d.h. f nimmt Maximum an.

Beweis angewendet auf stetige Funktion $-f$ zeigt $\inf f(D) > -\infty$, $\min f(D)$ existiert

$\boxtimes$

typische Anwendung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$

Dann bleibt f deutlich von 0 weg, d.h. es gibt $c > 0$

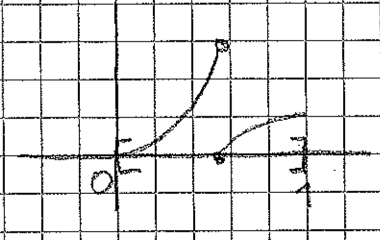
so dass $f(x) \geq c > 0$ für alle $x \in [a,b]$

denn $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen ✓

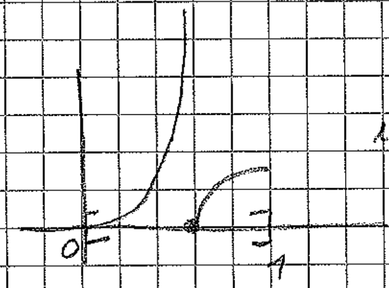
$\min f([a,b]) = f(\bar{x})$ für ein $\bar{x} \in [a,b]$ setze $c := f(\bar{x}) > 0$.

Spiel mit Voraussetzungen: lasse Voraussetzung weg und finde Gegenbeispiel
verdeutlicht die Bedeutung der Voraussetzungen

a) f nicht stetig

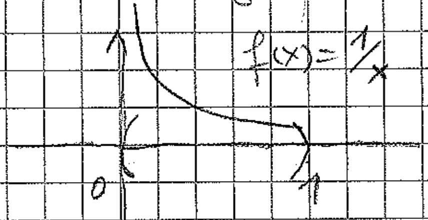


hat kein Max



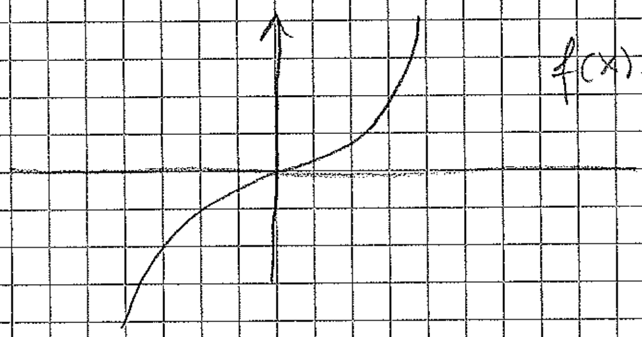
ist unbeschränkt
hat kein Max

b) D nicht abgeschlossen aber beschränkt z.B. $D = (0,1)$



$f(x) = 1/x$ unbeschränkt, kein Max, kein Min

c) D nicht beschränkt aber abgeschlossen z.B. $D = \mathbb{R}$



$f(x) = x^3$ unbeschränkt kein Max, kein Min

... auf beschränkten, abgeschlossenen Mengen sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig

Definition 11.5: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

beachte:

zu jedem a gibt es passende x-Vergrößerung

f stetig $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : \forall a \in D : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap (a-\delta, a+\delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f glm stetig $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a \in D : \forall x \in D \cap (a-\delta, a+\delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

eine x-Vergrößerung ist gut für alle a

Satz 11.6 Sei $\emptyset \neq D$ beschränkt und abgeschlossen. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: durch Widerspruch: ist f nicht glm stetig, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta_n = 1/n$ Punkte $x_n, y_n \in D$ existieren mit $|x_n - y_n| < 1/n$ aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Da D beschränkt gibt es konv TF $(x_{n_k})_{konv} \subset D$

Da D abgeschlossen gilt $\lim x_{n_k} = \bar{x} \in D$

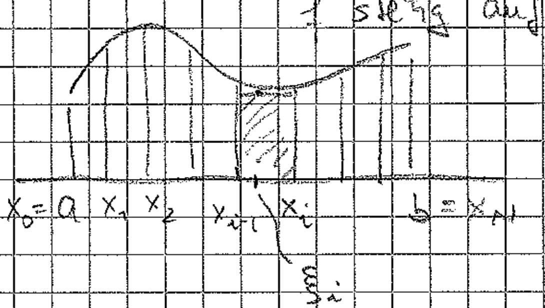
wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k$ gilt $\lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} = \bar{x}$

wegen Stetigkeit gilt $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$, $f(y_{n_k}) \to f(\bar{x})$

d.h. $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ $\boxed{\square}$

spielt wichtige Rolle z.B. bei Integration

f stetig auf $[a,b]$ also glm stetig



$$\sum_{i=1}^{N} f(\underbrace{\xi_i}_{\in [x_{i-1}, x_i]}) (x_i - x_{i-1})$$ Integralapproximation

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass

wenn $\max_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) < \delta$ für jede andere Wahl $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \underbrace{|f(\xi_i) - f(\eta_i)|}_{\leq \varepsilon \text{ da } |\xi_i - \eta_i| < \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) = (b-a)\varepsilon$$

d.h. Summenwert hängt beliebig wenig von der Wahl der Auswertungspunkte ab.