Kapitel 12: Differenzierbare Funktionen

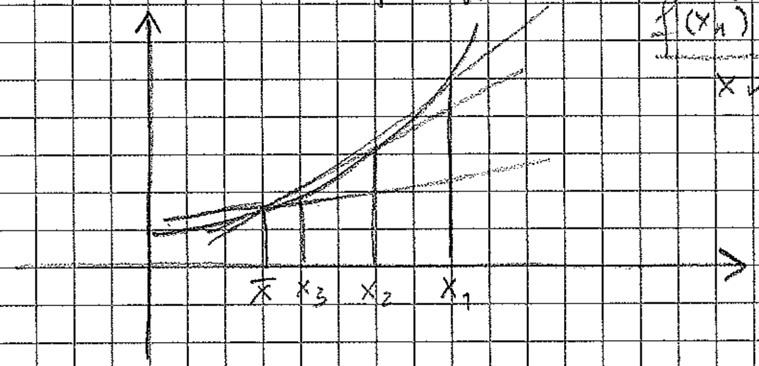
Definition 12.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in D$ nicht isoliert (d.h. es gibt $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$ mit $x_n \to \bar{x}$)

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in $\bar{x} \in D$ differenzierbar, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$ mit $x_n \to \bar{x}$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}}$$

existiert und unabhängig von der Folge ist. Er wird dann Ableitung von f an der Stelle $\bar{x}$ bezeichnet (in Symbolen $f'(\bar{x})$, $\dot{f}(\bar{x})$, $\frac{d}{dx} f(x)\big|_{x=\bar{x}}$) Ist f an jedem Punkt $\bar{x} \in D$ differenzierbar, so wird f differenzierbar genannt.

graphisch:



$\frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}}$ „Differenzenquotient"

ist Sekantensteigung d.h. Steigung der linearen Funktion

$$g_n(x) = \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}} (x - \bar{x}) + f(\bar{x})$$

durch $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ und $(x_n, f(x_n))$

Ableitung ist "Tangentensteigung" als Grenzwert der Sekantensteigung

Gleichung der Tangente in $\bar{x}$: $T_{\bar{x}}(x) = f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + f(\bar{x})$

Spracheinfachung durch

Definition 12.2: Sei $h: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\bar{x} \in \mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge in $D' \subset D$.

Existiert für alle Folgen $(x_n) \subset D'$ mit $x_n \to \bar{x}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = c$

und ist unabhängig von der Folge (x_n) dann nennt man

den Wert c auch Grenzwert von $h(x)$ in $\bar{x}$ für $x \in D'$ (in Symbolen $h(x) \xrightarrow[x \in D']{x \to \bar{x}} c$

oder $c = \lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x \in D'}} h(x)$). Spezialfälle: $D' = D$ Symbol $\lim_{x\to\bar{x}} h(x)$

$D' = D \cap (\bar{x}, \infty)$ Symbol $\lim_{x \downarrow \bar{x}} h(x)$ rechtsseitiger

$D' = D \cap (-\infty, \bar{x})$ Symbol $\lim_{x \uparrow \bar{x}} h(x)$ linksseitiger Grenzwert

Damit: f stetig in $\bar{x} \in D \iff \lim_{x\to\bar{x}} f(x)$ existiert (Nachberechnung!)

f differenzierbar in $\bar{x} \in D \iff \lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$ existiert

lässt man oft weg, da $E = D \setminus \{\bar{x}\}$ maximaler Defbereich von $h(x) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$ und $\lim_{x\to\bar{x}} h(x)$ Abkürzung für $\lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x \in E}} h(x)$

Wie gut approximiert die Tangente die Funktion?

Fehler: $\Delta_f(\bar{x}, x) = f(x) - T_{\bar{x}}(x)$

erfüllt nicht nur $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \Delta_f(x, \bar{x}) = 0$ sondern sogar $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \overbrace{\frac{\Delta_f(x, \bar{x})}{x - \bar{x}}}^{=: r_{f,\bar{x}}(x)} = 0$ dh $\Delta_f(x,\bar{x})$ geht schneller gegen Null als $x - \bar{x}$!

Satz 12.3: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in D$ sei nicht isoliert. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{x}$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ und eine in $\bar{x}$ stetige Funktion $x \longmapsto r_{f,\bar{x}}(x)$ existiert mit $r_{f,\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, so dass

$$(*) \qquad f(x) = f(\bar{x}) + L(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})\, r_{f,\bar{x}}(x)$$

In diesem Fall ist $L = f'(\bar{x})$.

Beweis: „$\Rightarrow$" definiere $L = f'(\bar{x})$, $r_{f,\bar{x}}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - T_{\bar{x}}(x)}{x - \bar{x}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f'(\bar{x}) & x \neq \bar{x} \\ 0 & x = \bar{x} \end{cases}$

dann $(*)$ erfüllt und $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} r_{f,\bar{x}}(x) = 0 = r_{f,\bar{x}}(\bar{x})$ (Stetigkeit)

„$\Leftarrow$" ist $(*)$ erfüllt dann gilt $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim\limits_{x \to \bar{x}} \left(L + r_{f,\bar{x}}(x)\right) \underset{\text{Stetigkeit}}{=} L + r_{f,\bar{x}}(\bar{x}) \underset{r_{f,\bar{x}}(\bar{x}) = 0}{=} L$

unmittelbare Konsequenz:

Satz 12.4: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ in $\bar{x} \in D$ differenzierbar. Dann ist f in $\bar{x}$ stetig.

Beweis:

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \left(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})\, r_{f,\bar{x}}(x) \right)$$

$$= f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \underbrace{\lim_{x \to \bar{x}} (x - \bar{x})}_{0} + \underbrace{\lim_{x \to \bar{x}} (x - \bar{x})}_{0} \underbrace{\lim_{x \to \bar{x}} r_{f,\bar{x}}(x)}_{0}$$

$$= f(\bar{x})$$

$\blacksquare$

Welche Funktionen sind differenzierbar? Baukastenprinzip!

$g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ $\qquad \dfrac{g_0(x) - g_0(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \dfrac{1 - 1}{x - \bar{x}} = 0 \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} 0$ d.h. $g_0'(\bar{x}) = 0$

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ $\qquad \dfrac{g_1(x) - g_1(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \dfrac{x - \bar{x}}{x - \bar{x}} = 1 \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} 1$ d.h. $g_1'(\bar{x}) = 1$

mit folgendem Satz + Induktion folgt

$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ist diffbar mit $g_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

und wieder mit Anwendung des Satzes: Jede rationale Fkt ist diffbar im Definitionsbereich

Satz 12.5: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $\bar{x} \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$, λf, $f \cdot g$ in $\bar{x}$ differenzierbar mit

$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$, $(\lambda f)'(\bar{x}) = \lambda f'(\bar{x})$, $(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$ ← Produktregel

Ist $\bar{x}$ in $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ nicht isoliert, dann ist $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ in $\bar{x}$ differenzierbar

und $\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \left(f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})\right) / g(\bar{x})^2$ ← Quotientenregel

Beweis: folgt aus Grenzwertsätzen (Satz 5.3)

für Produktregel nutze: $f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x}) = (f(x) - f(\bar{x}))g(x) + f(\bar{x})(g(x) - g(\bar{x}))$

geht gegen $g(\bar{x})$ für $x \to \bar{x}$ wegen Satz 12.4

für Quotientenregel nutze:

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\bar{x})} = -(g(x) - g(\bar{x}))\frac{1}{g(x)g(\bar{x})} \quad \text{liefert } \left(\frac{1}{g}\right)'(\bar{x}) = -\frac{g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

Verkettung $h \circ g$ mit $h(y) = \frac{1}{g(\bar{x})}\frac{1}{y}$

wobei h stetig in $g(\bar{x}) \neq 0$

strebt gegen $h(g(\bar{x})) = \frac{1}{g(\bar{x})^2}$ für $x \to \bar{x}$

zusammen mit Produktregel: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

$\boxtimes$

Weiter im Baukastenprinzip: <u>Kettenregel</u>

Satz 12.6: Sei $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\bar{x} \in D$ und $f : E \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subset E$ differenzierbar in $g(\bar{x})$. Dann ist $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\bar{x}$ und

$$(f \circ g)'(\bar{x}) = f'(g(\bar{x}))\, g'(\bar{x})$$

Beweis: $\left.\begin{array}{l} g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x-\bar{x}) + r_{g,\bar{x}}(x)\,(x-\bar{x}) \\ f(y) = f(g(\bar{x})) + f'(g(\bar{x}))(y-g(\bar{x})) + r_{f,g(\bar{x})}(y)\,(y-g(\bar{x})) \end{array}\right\}$ Satz 12.3

also $$f(g(x)) = f(g(\bar{x})) + f'(g(\bar{x}))\Big(g'(\bar{x})(x-\bar{x}) + r_{g,\bar{x}}(x)(x-\bar{x})\Big) + r_{f,g(\bar{x})}(g(x))\Big(g'(\bar{x})(x-\bar{x}) + r_{g,\bar{x}}(x)(x-\bar{x})\Big)$$

$$= f(g(\bar{x})) + f'(g(\bar{x}))\,g'(\bar{x})\,(x-\bar{x}) + (x-\bar{x})\,r_{f\circ g,\bar{x}}(x)$$

$$f'(g(\bar{x}))\,r_{g,\bar{x}}(x) + r_{f,g(\bar{x})}(g(x))\,g'(\bar{x}) + r_{f,g(\bar{x})}(g(x))\,r_{g,\bar{x}}(x)$$

stetig in $\bar{x}$ als Verkettung, Produkt stetiger Funktionen

und $r_{f\circ g,\bar{x}}(\bar{x}) = 0$

mit Satz 12.3 folgt Beh. $\boxtimes$

Weiter im Baukastenprinzip: Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 12.7: Sei D ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f: D \to W$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}: W \to D$. Ist f in $\bar{x} \in D$ differenzierbar mit $f'(\bar{x}) \neq 0$ und ist f^{-1} in $f(\bar{x})$ stetig, dann ist f^{-1} dort differenzierbar

mit $$(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Beweis: Sei $\bar{x} \in D$ und $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$ mit $x_n \longrightarrow \bar{x}$

Da f stetig in $\bar{x}$ (Satz 12.4) gilt $f(x_n) \longrightarrow f(\bar{x}) =: \bar{y}$

wegen Injektivität ist $f(x_n) \in W \setminus \{\bar{y}\}$ d.h. $\bar{y}$ ist kein isolierter Punkt von W.

Sei $(y_n) \subset W \setminus \{\bar{y}\}$ mit $y_n \longrightarrow \bar{y}$

Wegen Stetigkeit von f^{-1} in $\bar{y}$ gilt $x_n = f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$

und wegen Injektivität $(x_n) \subset D \setminus \{\bar{x}\}$

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\bar{y})}{y_n - \bar{y}} = \frac{x_n - \bar{x}}{f(x_n) - f(\bar{x})} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - \bar{x}}} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Satz } 5.3} \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Da Grenzwert unabhängig von gewählter Folge $(y_n) \subset W \setminus \{\bar{y}\}$ folgt Beh. $\boxtimes$

Weiter im Baukastenprinzip:

Satz 12.8: Sei $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r_a > 0$.

Dann ist F in $(x_0 - r_a, x_0 + r_a)$ differenzierbar und die Ableitung ist ebenfalls eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r_a

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

Beweis: verfeinerte Version des Beweises der Lipschitzstetigkeit

... gleiche Technik: wegen Kettenregel genügt es Differenzierbarkeit von

$$G(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{a_k R^k}{\overset{}{b_k}}\, y^k \quad \text{zu betrachten für } y \in [-1, 1]$$

Sekantensteigung $\quad \dfrac{G(x) - G(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \dfrac{x^k - \bar{x}^k}{x - \bar{x}} \quad (R < r_a) \quad \Leftarrow \quad q_k'(\bar{x})(x - \bar{x}) + r_{q_k, \bar{x}}(x)(x - \bar{x})$ mit $q_k(x) = x^k$

$$= \lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k b_k \bar{x}^{k-1}}_{\substack{\text{Partialsumme einer} \\ \text{Potenzreihe mit Konv.radius } r_a}} + \sum_{k=0}^{n} b_k r_{q_k, \bar{x}}(x) \Big)$$

(da $\sqrt[k]{k} \to 1$)

Mit Hilfe des <u>Mittelwertsatzes</u> sehen wir später: $\left| r_{q_k,\bar{x}}(x) \right| \leq |k(k-1)| \, |x-\bar{x}|$ für $x, \bar{x} \in [-1,1]$

wegen $\sqrt[k]{|k(k-1)|} \longrightarrow 1$ ist mit Wurzelkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} b_k |k(k-1)|$ absolut konvergent

und daher $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k \, r_{q_k,\bar{x}}(x) \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \, |k(k-1)| \right) |x-\bar{x}|$

insgesamt gilt also $\dfrac{G(x)-G(\bar{x})}{x-\bar{x}} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} \sum_{k=1}^{\infty} k \, b_k \, \bar{x}^{k-1} = G'(\bar{x})$

und mit $F(x) = G\left(\frac{x-x_0}{R}\right)$ $\quad R < r_a$

ist $F'(x) = G'\left(\frac{x-x_0}{R}\right) \cdot \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k \, R^{k-1} \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k (x-x_0)^{k-1}$ $\quad |x-x_0| \leq R$

Kettenregel

Differenzierbarkeit im beliebigen Punkt $\bar{x} \in (x_0 - r_a, x_0 + r_a)$ folgt wie im Fall der Stetigkeit durch geschickte (folgenangepasste) Wahl von R ∎