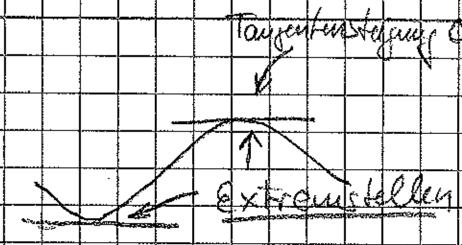
Kapitel 13 Der Mittelwertsatz

Differentialrechnung und Optimierung sind zutiefst miteinander verwoben



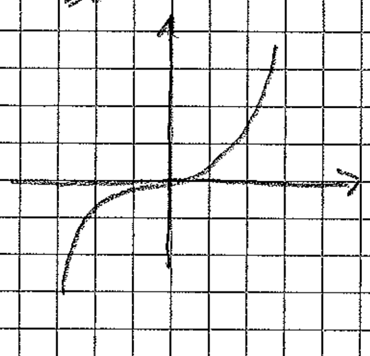
Definition 13.1 Eine Fkt $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ hat in $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in (a,b)$ mit $|x-y| < \varepsilon$

Satz 13.2: Die Funktion $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum (d.h. lokales Minimum oder Maximum) und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Beweis: (für lok. Maximum) Es gibt $\varepsilon > 0$: $I_\varepsilon = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$ und $f(x) \geq f(y)$ für $y \in I_\varepsilon$

also $0 \geq \lim_{y \downarrow x} \frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{y - x}_{\geq 0}} = f'(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{y - x}_{\leq 0}} \geq 0$ also $f'(x) = 0$ ∎

$f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 0$



zeigt $f'(x) = 0$ ist nicht hinreichend für ein Extremum

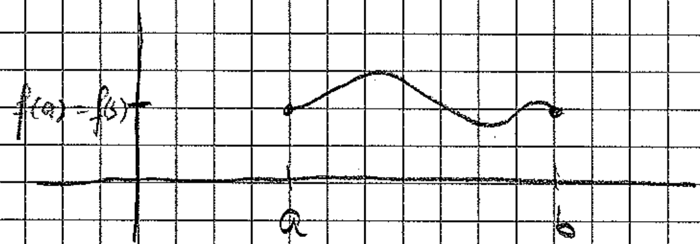
Satz zeigt: $f'(x) = 0$ notwendig für Extremum

Lemma 13.3 (von Rolle)

Sei $a<b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$ und f in (a,b) differenzierbar.

Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:



Da f stetig nimmt f auf $[a,b]$ Maximum und Minimum an in x_{max}, x_{min}

Fall $x_{max} \in (a,b)$: $\xi := x_{max}$

Fall $x_{min} \in (a,b)$, $x_{max} \notin (a,b)$: $\xi := x_{min}$

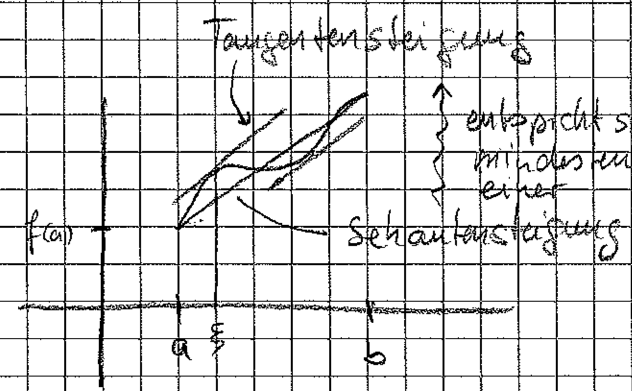
Fall $x_{max}, x_{min} \notin (a,b)$: $x_{min}, x_{max} \in \{a,b\}$ d.h. $\max f = f(a) = \min f$

d.h. f konstant, setze $\xi := \frac{a+b}{2}$ ▨

Satz 13.4 (Mittelwertsatz)

Sei $a<b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar in (a,b)

Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$



Beweis: Wende Lemma 13.3 an auf

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

beachte $F(a) = f(a) = F(b)$, $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\boxed{}$

beachte, MWS direkte Konsequenz von
- $f'(x)=0$ in Extrema
- und stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen Max und Min an.

Was ist so toll am MWS?

MWS-Konsequenz 1: Kriterium für Monotonieverhalten

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in $[a,b]$

monoton wachsend	wenn alle Sekantensteigungen	$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$	≥ 0	sind
monoton fallend			≤ 0	
streng monoton wachsend		$x, y \in [a,b]$	> 0	
streng monoton fallend		$x \neq y$	< 0	

mit der Definition der Ableitung folgt sofort:

ist f zusätzlich differenzierbar in (a,b) dann ist $f'(x)$ ≥ 0 / ≤ 0 / ≥ 0 / ≤ 0 für alle $x \in (a,b)$

Achtung: $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend aber $f'(0) = 0$

genauso: $f(x) = -x^3$

Der MWS zeigt eine nützliche umgekehrte Aussage ...

Satz 13.5: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.
Gilt für alle $x \in (a,b)$, dass $f'(x) \geq 0$ (bzw $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, $f'(x) < 0$)
so ist f in $[a,b]$ monoton wachsend (streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend)

Beweis: jeweils nach folgendem Muster für den Fall $f' > 0$

Angenommen f nicht streng monoton wachsend.

Dann existiert eine Schaukensteigung $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$ mit $a \leq x < y \leq b$

Wende MWS an auf dem Intervall $[x,y]$:

Es gibt $\xi \in (x,y) \subset (a,b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$ ↯ zu $f' > 0$ auf (a,b)

■

MWS - Konsequenz 2: hinreichende Bedingung für Extrema

Satz 13.6: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $x \in (a,b)$ sei f' differenzierbar mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$.
Dann besitzt f in x ein isoliertes lokales Maximum (Minimum)
(d.h. es gibt $\varepsilon > 0$ so dass $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$, $|x-y| < \varepsilon$, $y \neq x$)

Beweis: für Minimum (sonst betrachte $\tilde{f} = -f$)

Satz 12.3 angewendet auf f': $f'(y) = \overset{0}{f'(x)} + f''(x)(y-x) + r_{f',x}(y)(y-x)$

$r_{f',x}$ stetig in x: zu $\varepsilon = f''(x)/2$ gibt es $\delta > 0$ mit $|r_{f',x}(y) - \underset{=0}{r_{f',x}(x)}| < \varepsilon$ falls $|y-x| < \delta$.

also $f'(y) = (\underbrace{f''(x) + r_{f',x}(y)}_{\geq \frac{f''(x)}{2} > 0})(y-x)$ falls $|y-x| < \delta$

ξ zwischen x und y

MWS: $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) = (\underbrace{f''(x) + r_{f',x}(\xi)}_{>0}) \underbrace{(\xi - x)(y-x)}_{>0 \text{ für } x \neq y} \geq 0$ für $|y-x| < \delta$, $x \neq y$

$\boxtimes$

MWS - Konsequenz 3: Satz von Taylor ("Hauptsatz der Numerik")

Definition 13.7: Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt 0-mal differenzierbar.

Wir setzen $f^{(0)} := f$.

Für $k \in \mathbb{N}$ heißt f k-mal differenzierbar, wenn f $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die Ableitung $f^{(k)} := f^{(k-1)'}$ existiert.

f heißt ∞-mal differenzierbar, wenn f k-mal differenzierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 13.8. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, x \in I$. Dann existiert ein ϑ zwischen a und x, so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\,(x-a)^k}_{\text{"Taylorpolynom vom Grad } n \text{ mit Entwicklungspunkt } a\text{"}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta)\,(x-a)^{n+1}}_{\text{"Restglied (in Lagrangescher Form"}}$$

Beobachtung: das Taylorpolynom $P_{f,a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^n$

ist so gebaut, dass $P_{f,a,n}(a) = f^{(0)}(a) = f(a)$

und $P_{f,n,a}'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\, k(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} (f')^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1}$

$$\underset{m:=k-1}{=} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} (f')^{(m)}(a)(x-a)^m = P_{f',a,n-1}(x)$$

also insbesondere $P_{f,a,n}'(a) = P_{f',a,n-1}(a) = f'(a)$

und $P_{f,a,n}'' = P_{f',a,n-1}' = P_{f'',a,n-2}$

allgemein $P_{f,a,n}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad 0 \le k \le n$ ersten n Ableitungen stimmen mit denen von f in a überein!

$P_{f,a,n}^{(k)}(x) = 0 \quad k > n$

m.a.W. $f - P_{f,a,n}$ hat eine mindestens $n+1$-fache Nullstelle in a

Definition 13.9: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ein Punkt $x \in (a,b)$ heißt k-fache Nullstelle von f, wenn f $(k+1)$-mal differenzierbar ist mit

$$f^{(0)}(x) = f^{(1)}(x) = \ldots = f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k+1)}(x) \neq 0$$

Lemma 13.10: Sei $u < 0 < v$ und $F: (u,v) \to \mathbb{R}$ habe eine mindestens k-fache Nullstelle in 0. Dann gibt es zu $0 \neq x \in (u,v)$ ein ϑ zwischen 0 und x mit $F(x) = \frac{1}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\vartheta)\, x^{k+1}$

Beweis: Sei $G(t) := F(t) - \frac{t^{k+1}}{x^{k+1}} F(x)$

Dann hat G mindestens k-fache Nullstelle in $t = 0$, $G^{(k+1)}(t) = F^{(k+1)}(t) - \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} F(x)$

und $G(x) = 0$

MWS: $G'(\xi_1) = \frac{\overset{0}{G(x)} - \overset{0}{G(0)}}{x - 0} = 0$ für ξ_1 zwischen x und 0

MWS: $G''(\xi_2) = \frac{\overset{0}{G'(\xi_1)} - \overset{0}{G'(0)}}{\xi_1 - 0} = 0$ für ξ_2 — " — ξ_1 — " —

MWS $G'''(\xi_3) = \frac{G''(\xi_2) - G''(0)}{\xi_2 - 0} = 0$ für ξ_3 — " — ξ_2 — " —

$\vdots$

MWS $G^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = \frac{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(0)}{\xi_k - 0} = 0$ für $\xi_{k+1} =: \vartheta$ — " — ξ_k und 0 also zwischen x und 0

☒

außerdem genauere Spezifikation von $\tau_{f,a}$ wenn f 2-mal differenzierbar

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\tfrac{1}{2} f''(\vartheta)(x-a)^2}_{\tau_{f,a}(x)(x-a)}$$

also $\tau_{f,a}(x) = \frac{1}{2} f''(\vartheta)(x-a)$ für ein ϑ zwischen x und a

Nachtrag zu Satz 12.8: $q_k(x) = x^k \quad q_k'(x) = k x^{k-1} \quad q_k''(x) = k(k-1)\, x^{k-2} \quad k \geq 2$

für $|x| \leq 1$ ist $|q_k''(x)| \leq |k(k-1)|$

also $|\tau_{q_k,\bar{x}}(x)| \leq \frac{1}{2} |k(k-1)|\, |x-\bar{x}|$ für $x, \bar{x} \in [-1,1]$ $k \geq 2$

auch für $k \leq 1$ ist $|\tau_{q_k,\bar{x}}(x)| = 0 = \frac{1}{2} |k(k-1)|\, |x-\bar{x}|$

Definition 13.11: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $a \in I$. Ist $f: I \to \mathbb{R}$ ∞-mal differenzierbar, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) (x-a)^k$$

die Taylorreihe zu f im Punkt a.

Achtung:
- Konvergenzradius der Taylorreihe ist nicht notwendig > 0
- falls die Taylorreihe konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen f
- zur Konvergenz im Punkt x muss man zeigen, dass Restglied in x gegen 0 konvergiert

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ um $a = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $f''(x) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}$, $f'''(x) = -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1+x)^{-7/2}$, ...

Induktion: $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k} (1+x)^{-(k+\frac{1}{2})}$ $\quad k \in \mathbb{N}_0$

also $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$ $\quad$ damit Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} x^k$

Quotientenkriterium zeigt absolute Konvergenz für $|x| < 1$

typisches Restglied $R_n(x) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^n}{(1+\vartheta)^n} \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta}}$ $\quad \vartheta$ zwischen 0 und x

wir wissen $\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} y^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ wenn $|y| < 1$ (da Reihe konvergent ist)

damit $|R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ wenn $\left|\frac{x}{1+\vartheta}\right| < 1$

Fall $0 < x < 1$ dann $\vartheta > 0$ und $\left|\frac{x}{1+x}\right| < x < 1$ ✓

Fall $-\frac{1}{2} < x < 0$ dann $\vartheta > -\frac{1}{2}$ und $\left|\frac{x}{1+x}\right| < \frac{|x|}{1-\frac{1}{2}} = 2|x| < 1$ ✓

also $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} x^k$ für $-\frac{1}{2} < x < 1$

im Fall $0 < x < -\frac{1}{2}$ ... unklar, da Lage von ϑ nicht genau bekannt (typische Situation!)

brauche andere Tricks ... zB Integralrestglied, oder Funktionentheorie oder

Taylorreihe zu f^2 ist (Taylorreihe zu f)^2 ... hier $f^2(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ geom. Reihe konv für alle $|x| < 1$

Beweis von Satz 13.8:

Sei $F(y) := f(y+a) - P_{f,a,n}(y+a)$, $y \in I - a =: (u,v)$

Dann hat F mindestens n-fache Nullstelle in 0

zu $x \in I$ d.h. $x-a \in (u,v)$ gibt es $\vartheta - a$ zwischen 0 und $x-a$ mit

$$\begin{array}{c} F(x-a) = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{F^{(n+1)}(\vartheta - a)}_{f^{(n+1)}(\vartheta)} (x-a)^{n+1} \\ \parallel \\ f(x) - P_{f,a,n}(x) \end{array}$$

$\square$

Bedeutung: Restglied $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \underbrace{(x-a)^{n+1}}_{\text{geht sehr schnell gegen Null für } x \to a \text{ und großes } n}$

d.h. Restglied extrem klein für x nahe a und n groß

d.h. $P_{f,a,n}(x)$ sehr gute Approximation für $f(x)$ wenn x nahe a und n groß

"differenzierbare Fkt sind lokal sehr gut durch Polynome approximierbar mit quantifizierbarem Fehler"

MWS - Konsequenz 4: Regel von l'Hospital

Lemma 13.12: (Verallgemeinerter MWS)

Sei $a<b$, $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b)

Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)\,(g(b)-g(a)) = g'(\xi)\,(f(b)-f(a))$

Beweis: $h(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$

erfüllt $h'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a))$

und $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$

also gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = 0$ $\blacksquare$

Ist g streng monoton auch als $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ schreibbar.

mit $g(x) = x$ ist MWS in Verallgemeinerung enthalten

Anwendung bei "schwierigen Grenzwerten" $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{\sin x} = ?$

Satz 5.3 funktioniert nicht, da Nenner $\to 0$

auch bestimmte Divergenz unklar, da Zähler $\to 0$

Setze $f(x) = \exp(x) - 1$, $g(x) = \sin x$

$$\frac{\exp(x)-1}{\sin x} = \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{g(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(0)}}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\exp(\xi)}{\cos(\xi)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\exp(0)}{\cos(0)} = 1$$

ξ zwischen x und 0
geht gegen 0 wenn $x \to 0$

also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)}{\cos(x)} = 1$ Spezialfall der Regel von l'Hospital

Satz 13.13: Seien $s, L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und seien f, g differenzierbare Funktionen auf (a, s) bzw (s, b), für die

$$\lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

gilt. Im Fall $\lim_{x \to s} f(x) = \lim_{x \to s} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to s} |g(x)| = \infty$

gilt dann $\lim_{x \to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Beweis: jeweils mit Lemma 13.12

enthält viele unterschiedliche Fälle (Konvergenz, bestimmte Divergenz, s endlich / unendlich) $\square$

Beispiel:

$$X_n = \left(1 + \tfrac{p}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(1 + \tfrac{p}{n}\right)^n\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \tfrac{p}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln(1+px)}{x}\right)\Bigg|_{x = 1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp(p)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+px)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+px}\, p}{1} = p$$

MWS - Konsequenz 5: Eindeutigkeit von Stammfunktionen

Definition 13.14: Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$, wenn $F' = f$ gilt.

Seien F, G zwei Stammfunktionen von $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

Dann ist $H: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) - G(x)$ differenzierbar und $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $x \in I$

und es greift

Satz 13.15: Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $H: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $H'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist H konstant.

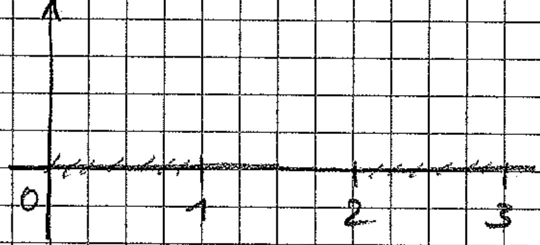
Beweis: Ann. H nicht konstant. Dann gibt es $x_1 < x_2 \in I$ mit $H(x_1) \neq H(x_2)$

also nach MWS auch $\xi \in I$ zwischen x_1, x_2 mit

$$H'(\xi) = \frac{H(x_1) - H(x_2)}{x_1 - x_2} \neq 0 \quad ↯ \qquad \boxtimes$$

also: zwei Stammfunktionen von $f: I \to \mathbb{R}$ unterscheiden sich höchstens um eine Konstante!

Achtung: I = Intervall ist entscheidend



$f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 0$

hat Stammfunktion $F(x) = 0$

oder auch $G(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [2,3] \end{cases}$

aber $F - G$ ist keine Konstante!

Einsatz bei Anfangswertproblemen:

AWP $\begin{cases} \text{Finde } u \in [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und differenzierbar in } (0,\infty) \\ \text{mit der Eigenschaft } u(0) = C \text{ und } \underbrace{u'(t) = \lambda u(t)}_{\text{gewöhnliche Differenzialgleichung}} \quad t \in (0,\infty) \end{cases}$

C: Anfangswert

Durch Raten: $u(t) = C \exp(\lambda t)$ ist eine Lösung des Problems

gibt es noch mehr Lösungen (Eindeutigkeitsfrage)

Ann: $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist weiter Lösung

dann ist $w(t) = (u(t) - v(t))\exp(-\lambda t)$ stetig auf $[0,\infty)$, diffbar auf $(0,\infty)$ und

und $w(0) = (c - c)\exp(0) = 0$, $w'(t) = (u'(t) - v'(t))\exp(-\lambda t) + (u(t) - v(t))(-\lambda)\exp(-\lambda t)$

$$= \lambda(u(t) - v(t))\exp(-\lambda t) - \lambda(u(t) - v(t))\exp(-\lambda t) = 0$$

also w konstant auf $(0,\infty)$ Satz 13.15

und wegen Stetigkeit auf $[0,\infty)$ und $w(0) = 0$ folgt $w(t) = 0$ für $t \in [0,\infty)$

damit $v(t) = u(t)$ $t \in [0,\infty)$ dh. jede weitere Lsg ist gleich u ... damit

ist u einzige Lösung von AWP.