Kapitel 14: Integration

Fall 1: $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfkt von h also $u' = h$ ist bekannt

zerlege $[a,b]$ in Teilintervalle $I_k(t) = [t_{k-1}, t_k]$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$

dann $u(t_k) = u(t_k) - u(t_{k-1}) + u(t_{k-1}) - u(t_{k-2}) + \ldots + u(t_1) - u(t_0) + u(t_0)$ "Teleskopsumme"

$$= u(a) + \sum_{i=1}^{k} u(t_i) - u(t_{i-1}) = u(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

$$u(t_k) \overset{MWS}{=} u(a) + \sum_{i=1}^{k} h(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{mit } \xi_i \in I_i(t)$$

u dargestellt durch $u' = h$ mit spezieller Summe (sog. Riemann-Summe)

Fall 2: Stammfkt zu $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht bekannt (interessanter Fall !)

wähle Zerlegung t und Zwischenstellen ξ zu t d.h. $\xi_k \in I_k(t)$

definiere $H_{t,\xi}(t_k) := \sum_{i=1}^{k} h(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ über Riemann-Summe dann gilt: $$\frac{H_{t,\xi}(t_k) - H_{t,\xi}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{h(\xi_k)(t_k - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = h(\xi_k)$$

d.h. $H_{t,\xi}$ ist <u>approximative Stammfunktion</u> zu h

<u>Idee</u>: <u>wenn bei immer **feinerer** Zerlegung</u> $\sum h(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ konvergiert

<u>dann ergibt sich damit ein heißer Kandidat für eine Stammfkt</u> zu h !

Definition 14.1 : Sei $a<b$ und $I := [a,b]$. Eine Zerlegung t von I ist eine Folge $t : \mathbb{N}_0 \to I$ mit den Eigenschaften

- $t_0 = a$, $b \in t(\mathbb{N}_0)$
- $t_n \leq t_{n+1}$ mit Gleichheit nur falls $t_n = b$

Die Menge aller Zerlegungen von I bezeichnen wir mit $Z(I)$

Bei $t \in Z(I)$ nennen wir

- $N_t = \min \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid t_n = b \}$ die Anzahl der Teilintervalle von t
- $I_k(t) = [t_{k-1}, t_k)$ $k \in N_t$ das k-te <u>Teilintervall</u> mit Länge $|I_k(t)| := t_k - t_{k-1}$
- $\Delta(t) = \max\limits_{k \in N_t} |I_k(t)|$ die <u>Feinheit</u> der Zerlegung
- $\xi \in \mathbb{R}^{N_t}$ mit $\xi_k \in I_k(t)$ einen t-Vektor
- $l(t)$ den t-Vektor $l_k(t) = t_{k-1}$ der linken Intervallgrenzen
- $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine t-Treppenfunktion, falls $h|_{I_k(t)}$ konstant ist für alle $k \in N_t$.

Die Menge aller Treppenfunktionen auf I ist

$$J(I) = \{ h : I \to \mathbb{R} \mid h \text{ ist } t\text{-Treppenfunktion für ein } t \in Z(I) \}$$

Eine Zerlegung t' heißt __feiner__ als t $(t' \prec t)$ falls $t(\mathbb{N}_0) \subset t'(\mathbb{N}_0)$ (t heißt dann __gröber__ als t')

Zu Zerlegungen t, t' ist $t \cup t'$ die Zerlegung mit $t \cup t'(\mathbb{N}_0) = t(\mathbb{N}_0) \cup t'(\mathbb{N}_0)$

Zu $h \in J(I)$ ist t^h die gröbste Zerlegung, die alle Sprungstellen von h umfasst

Zu $f : I \to \mathbb{R}$ und einer Zerlegung t mit t-Vektor ξ

ist $f_{t,\xi} \in J(I)$ definiert durch die Stufenwerte $f(\xi_k)$ auf $I_k(t)$ sowie $f_{t,\xi}(b) := f(b)$

und die (t,ξ)-__Riemann-Summe__ von f ist $S(f,t,\xi) := \sum_{k=1}^{N_t} f(\xi_k)\,(t_k - t_{k-1})$

Zu $h \in J(I)$ ist das __Riemann-Integral__ definiert als $\int_a^b h(x)\,dx := S(h, t^h, \ell(t^h))$

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt __Riemann-integrierbar__, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\underline{h}, \overline{h} \in J(I)$ existieren mit $\underline{h} \leq f \leq \overline{h}$ und $\int_a^b \overline{h}(x)\,dx - \int_a^b \underline{h}(x)\,dx < \varepsilon$

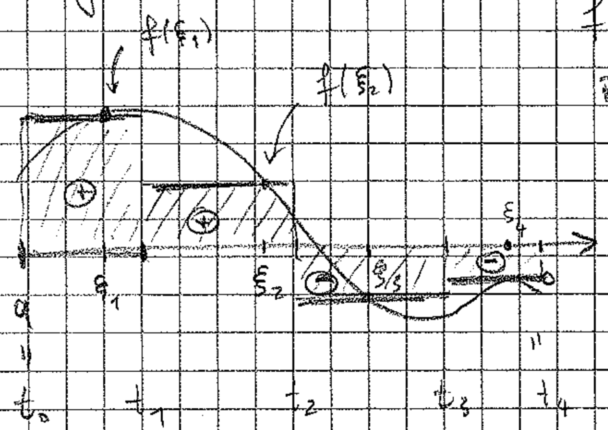
In diesem Fall definieren wir das __Riemann-Integral__ von f als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b \overline{h}(x)\,dx \;\middle|\; f \leq \overline{h} \in J(I) \right\}$$

$\mathcal{R}(I)$ ist die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf I

Bemerkungen:

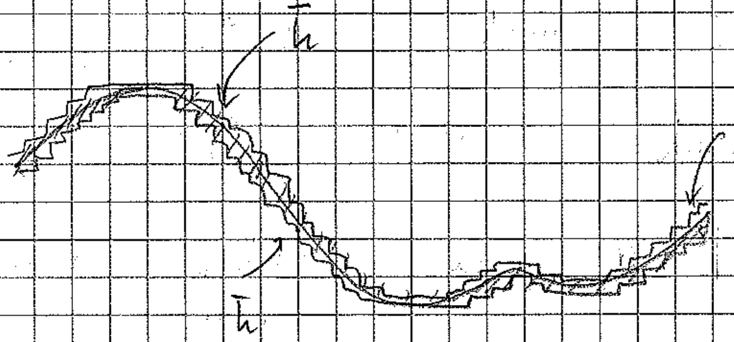
1)



$f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \mathrel{\hat{=}}$ <u>signierter</u> Flächeninhalt zwischen Stufe von $f_{t,\xi}$ und x-Achse

R-Summe $\mathrel{\hat{=}}$ signierter Flächeninhalt zwischen Graph von $f_{t,\xi}$ und x-Achse

Für integrierbares $f \in \mathcal{R}(I)$ ist



Differenzfläche $< \varepsilon$

also Fläche zwischen Graph von f und x-Achse beliebig gut approximiert durch Fläche zwischen Graph von $\overline{h}$ bzw $\underline{h}$ und x-Achse

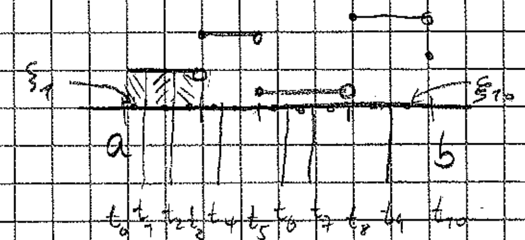
$\overline{h}$-Fläche überschätzt inf ist sinnvoller Wert

$\underline{h}$ Fläche unterschätzt sup ist —"—

2) Sei $h \in \mathcal{J}(I)$

Dann $\int_a^b h(x)\,dx = S(h, t^h, \ell(t^h)) = \sum_{i=1}^{N_{t^h}} h(t_{i-1}^h)(t_i^h - t_{i-1}^h)$

$= S(h, t, \xi)$



ξ t - Vektor

präziser Beweis durch

Induktion über $n = |t(\mathbb{N}_0) \setminus t'(\mathbb{N}_0)|$

mit $t \prec t' \prec t^h$ $\qquad \forall t \prec t^h$

damit auch: $S(f, t, \xi) = \int_a^b f_{t,\xi}(x)\,dx$

3) beachte: $h \in \mathcal{R}(I)$ dann zu $\varepsilon > 0$ wähle $\underline{h} = h = \overline{h}$ dann $\int_a^b \overline{h}(x)\,dx - \int_a^b \underline{h}(x)\,dx = 0 < \varepsilon$

und $\mathcal{R}$-Integral entspricht $\mathcal{J}$-Integral $\int_a^b h(x)\,dx = \inf \left\{ \int_a^b \overline{h}(x)\,dx \;\middle|\; h \le \overline{h} \in \mathcal{J}(I) \right\}$

$\mathcal{J}$-Integral $S(h, t', \ell(t'))$ $\qquad$ $\mathcal{R}$-Integral

4) Für Treppenfunktionen $f, g \in \mathcal{T}(I)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $f+g,\ cf,\ |f| \in \mathcal{T}(I)$ und

L: <u>Linearität</u>: $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

M: <u>Monotonie</u>: $f \leq g$ dann $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

D: <u>Dreiecksungleichung</u>: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Nachweis: M, L: rechne mit $t^f \cup t^g$; D: Dreiecksungleichung für Summen

hilfreiche Notation: "Indikatorfunktion" $A \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

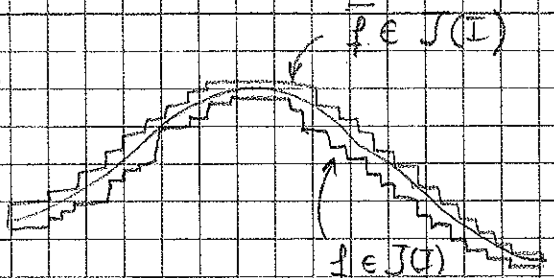
dann $\mathbb{1}_{I_k(t)}$ Treppenfunktion mit $\int_a^b \mathbb{1}_{I_k(t)}(x)\,dx = 1 \cdot (t_k - t_{k-1})$

und $h \in \mathcal{T}(I)$ kann geschrieben werden als $h(x) = \sum_{k=1}^{N_t} h(\xi_k)\, \mathbb{1}_{I_k(t)}(x)$ falls $t \prec t^h$ und t vor ξ

dann $\int_a^b \sum_{k=1}^{N_t} h(\xi_k)\, \mathbb{1}_{I_k(t)}(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx = \underset{t \prec t^h}{S(h, t, \xi)} = \sum_{k=1}^{N_t} h(\xi_k)\,(t_k - t_{k-1})$

$= \sum_{k=1}^{N_t} h(\xi_k) \int_a^b \mathbb{1}_{I_k(t)}(x)\,dx$

5) Sei $f \in R(I)$.



$\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ heißen "ε-Klammer" wenn Fläche zwischen graphen $\int_a^b \overline{f}(x)dx - \int_a^b \underline{f}(x)dx < \varepsilon$

beachte:

- R-intbare Funktionen sind beschränkt (zB. durch $\max |\overline{f}| + |\underline{f}|$)
- $O = \{ \int_a^b \overline{h}(x)dx \mid f \leq \overline{h} \in J(I) \}$ hat untere Schranke (zB. $\int_a^b \underline{f}(x)dx$ wegen $\underline{f} \leq f \leq \overline{h}$ und 4M)
  damit existiert inf (kleinste "<u>Obersumme</u>")
- $U = \{ \int_a^b \underline{h}(x)dx \mid f \geq \underline{h} \in J(I) \}$ hat obere Schranke (zB. $\int_a^b \overline{f}(x)dx$)
  damit existiert sup (größte "<u>Untersumme</u>")
- $\sup U \geq \int_a^b \underline{f}(x)dx > \int_a^b \overline{f}(x)dx - \varepsilon \geq \inf O - \varepsilon = \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$
  da ε beliebig wählbar: $\int_a^b f(x)dx = \sup U$
- ist $\underline{f}, \overline{f}$ ε-Klammer dann $\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \leq \int_a^b \underline{f}(x)dx \leq \int_a^b \overline{f}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$

Satz 14.2: Die Eigenschaft (4) gilt auch mit $\mathcal{R}(I)$ anstelle von $\mathcal{T}(I)$.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

Fall $c = 0$: klar, da $0 \cdot f = 0 \in \mathcal{T}(I)$.

Fall $c > 0$: wähle "$\tilde{\varepsilon}$ - Klammer" $\underline{f}, \overline{f}$ von f mit $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/c$

dann $c\underline{f}, c\overline{f}$ ε-Klammer von cf also $cf \in \mathcal{R}(I)$.

außerdem:
$$\int_a^b cf(x)\,dx \leq \int_a^b c\overline{f}(x)\,dx = c\int_a^b \overline{f}(x)\,dx \leq c\left(\tilde{\varepsilon} + \int_a^b f(x)\,dx\right)$$
$$\int_a^b cf(x)\,dx \geq \int_a^b c\underline{f}(x)\,dx = c\int_a^b \underline{f}(x)\,dx \geq c\left(\int_a^b f(x)\,dx - \tilde{\varepsilon}\right)$$

also $\left|\int_a^b cf(x)\,dx - c\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt Beh.

Fall $c < 0$: hier $c\overline{f} \leq cf \leq c\underline{f}$ ansonsten gleiche Argumentation

für Summe, wähle $\varepsilon/2$ Klammern von f, g, ansonsten analoge Argumentation

für Monotonie: $\underline{f} \leq f \leq g \leq \overline{g}$ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \underline{f}(x)\,dx + \varepsilon/2 \underset{4M}{\leq} \int_a^b \underline{g}(x)\,dx + \varepsilon/2 \leq \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon$

allgemein zerlegt man: $h(x)$ in Positiv/Negativteil $h^+(x) = \max\{h(x), 0\} \geq 0$, $h^-(x) = \max\{-h(x), 0\} \geq 0$

dann $h(x) = h^+(x) - h^-(x)$, $|h(x)| = h^+(x) + h^-(x)$

Sei $\underline{f}, \overline{f}$ ε-Klammer zu f

Setze $\overline{g}(x) := \max\{(\overline{f})^+(x), (\underline{f})^-(x)\}$, $\underline{g}(x) = \max\{(\underline{f})^+(x), (\overline{f})^-(x)\}$ dann $\underline{g} \leq |f| \leq \overline{g}$

dann $\overline{g}(x) - \underline{g}(x) \leq \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ (Nachweis mit Fallunterscheidung ① $\underline{f}(x) \geq 0$ ② $\overline{f}(x) \leq 0$, ③ $\overline{f}(x) \geq 0 \geq \underline{f}(x)$)

mit 4M folgt $\underline{g}, \overline{g}$ ε-Klammer für $|f|$ also $|f| \in \mathcal{R}(I)$

wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int_a^b |f(x)|dx \underset{L,M}{\leq} \int_a^b f(x)\,dx \underset{M}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx$

dann $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ ▨

Satz 14.3 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f glm. stetig auf $[a,b]$ gibt es $\delta > 0$

so dass $|f(x) - f(y)| < \tilde{\varepsilon}$ falls $|x-y| < \delta$ mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

Wähle $t \in J([a,b])$ mit $\Delta(t) < \delta$. Sei ξ beliebiger t-Vektor.

Setze $\underline{f} := f_{t,\xi} - \tilde{\varepsilon}$, $\overline{f} := f_{t,\xi} + \tilde{\varepsilon}$

$x \in [a,b]$ liegt in $I_k(t)$ damit $|x - \xi_k| < \delta$ d.h. $|f(x) - f(\xi_k)| < \tilde{\varepsilon}$

also $\underline{f}(x) = f(\xi_k) - \tilde{\varepsilon} < f(x) < f(\xi_k) + \tilde{\varepsilon} = \overline{f}(x)$

und $\int_a^b \overline{f}(x)\,dx - \int_a^b \underline{f}(x)\,dx = 2\int_a^b \tilde{\varepsilon}\,dx = 2\tilde{\varepsilon}(b-a) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\boxtimes$

Satz 14.4 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$

Beweis: O.E. f mon. wachsend (sonst arbeite mit $-f$), $\varepsilon > 0$

wähle äquidistante Zerlegung $t_k = a + \frac{b-a}{N_t} k$ mit $\frac{b-a}{N_t} < \varepsilon / f(b) - f(a) + 1$

setze $\underline{f}$ als $f(t_{k-1})$ und $\overline{f}$ als $f(t_k)$ auf $[t_{k-1}, t_k)$ dann $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$

und $\int_a^b \overline{f}(x)\,dx - \int_a^b \underline{f}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N_t} f(t_k)\frac{b-a}{N_t} - \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\frac{b-a}{N_t} = \frac{(f(b) - f(a))}{f(b) - f(a) + 1}\varepsilon < \varepsilon$ $\boxtimes$

Satz 14.5. Sei $\overline{x} \in [a,b]$ und $f_{\overline{x}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{\overline{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x = \overline{x} \\ 0 & x \neq \overline{x} \end{cases}$

Dann gilt $f_{\overline{x}} \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\int_a^b f_{\overline{x}}(x)dx = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. $\underline{h} := 0$, $\overline{h}(x) := \begin{cases} 1 & x \in [\overline{x} - \frac{\varepsilon}{2}, \overline{x} + \frac{\varepsilon}{2}) \cap [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ dann $\underline{h}(x) \leq f_{\overline{x}}(x) \leq \overline{h}(x)$

und $\int_a^b \overline{h}(x)dx = \int_a^b h(x)dx - \int_a^b \underline{h}(x)dx < \varepsilon$ so dass $f_{\overline{x}} \in \mathcal{R}([a,b])$

wegen $0 = \int_a^b \underline{h}(x)dx \leq \int_a^b f_{\overline{x}}(x)dx \leq \int_a^b \overline{h}(x)dx < \varepsilon$ ist $\int_a^b f_{\overline{x}}(x)dx = 0$ ∎

Satz 14.6: Sei $[c,d] \subset [a,b]$ und $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann ist $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}([c,d])$ und $\mathbb{1}_{[c,d]} f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\int_c^d f|_{[c,d]}(x)\,dx = \int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]} f(x)\,dx$

Beweis: übliches Vorgehen: $\underline{h}, \overline{h}$ ε-Klammer von f

dann $\underline{h}|_{[c,d]}, \overline{h}|_{[c,d]}$ –"– $f|_{[c,d]}$

$\mathbb{1}_{[c,d]} \underline{h}, \mathbb{1}_{[c,d]} \overline{h}$ –"– $\mathbb{1}_{[c,d]} f$

Satz 14.7. Sei $a < c < b$ und $f \in \mathcal{R}([a,c])$, $g \in \mathcal{R}([c,b])$ dann ist $h \in \mathcal{R}([a,b])$ mit $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,c) \\ g(x) & x \in [c,b] \end{cases}$ wobei

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Beweisidee: "klebe" $\frac{\varepsilon}{2}$-Klammern $\underline{f}, \overline{f}$ und $\underline{g}, \overline{g}$ von f, g zusammen (durch $\{$ – Definition). Weise Eigenschaften nach $\blacksquare$

Definition 14.8: Eine Funktion $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig (monoton, differenzierbar etc) wenn ein $t \in Z([a,b])$ existiert so dass $f|_{(t_{k-1}, t_k)}$ stetig (monoton, differenzierbar etc.) ist für alle $k = 1, \ldots, N_t$.

Kombination von 14.3 bis 14.7 zeigt: stückweise stetige und stückweise monotone Funktionen sind Riemann integrierbar.

Definition 14.9 Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann ist $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

und $\int_s^s f(x)\,dx := 0$ für jedes $s \in [a,b]$

und für $[c,d] \subset [a,b]$ $\int_c^d f(x)\,dx := \int_c^d f|_{[c,d]}(x)\,dx$

Damit gilt für beliebige $s, c, d \in [a,b]$

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^s f(x)\,dx + \int_s^d f(x)\,dx$$

(Beweis mit Def 14.9 und Satz 14.7 ... Fallunterscheidung) zur approximativen Berechnung von Integralen

Satz 14.10: Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $Z(I)$ mit $\Delta(t^{(n)}) \to 0$

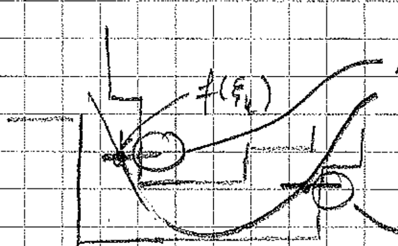
Dann gilt für jede Folge $\xi^{(n)}$ von $t^{(n)}$-Vektoren

$$\lim_{n\to\infty} S(f, t^{(n)}, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $B \geq |f|$

wähle $\frac{\varepsilon}{2}$-Klammer $\underline{f}, \overline{f}$; sei $t = t^{\underline{f}} \cup t^{\overline{f}}$

Wähle N so groß, dass $\Delta(t^{(n)}) < \min\{\Delta(t), \frac{\varepsilon}{4BN_t}\}$ für $n \geq N$



Achtung $f_{t^{(n)},\xi^{(n)}}$ kann größer als $\overline{f}$ sein

$f_{t^{(n)},\xi^{(n)}}$ kann kleiner als $\underline{f}$ sein

aber höchstens bei den N_t Punkten in $t(N_0)$

maximale Differenz: $2B$

rechne auf $t' = t \cup t^{(n)}$

$$\int_a^b \overline{f}(x)\,dx - \int_a^b f_{t^{(n)},\xi^{(n)}}(x)\,dx \leq \int_a^b \overline{f}(x) - \underline{f}(x)\,dx + N_t \cdot \Delta(t^{(n)}) \cdot 2B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

genauso: $\int_a^b f_{t^{(n)},\xi^{(n)}}(x)\,dx - \int_a^b \underline{f}(x)\,dx < \varepsilon$ damit $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_{t^{(n)},\xi^{(n)}}(x)\,dx \right| < 2\varepsilon$ $\boxtimes$