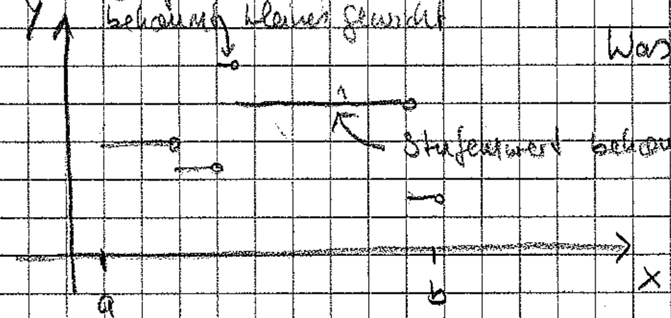
Kapitel 15: Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$h \in J([a,b])$



Was ist ein gute <u>Mittelwert</u> M für h auf dem Intervall $[a,b]$?

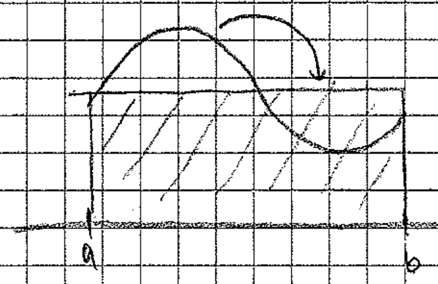
<u>gewichtetes arithmetisches Mittel</u> mit relative Intervall Größe $\frac{|I_k(t)|}{(b-a)}$ als Gewicht für $h(\xi_k)$

d.h. $$M = \sum_{k=1}^{N_t} \frac{|I_k(t)|}{b-a} h(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x)\,dx$$

Definition 15.1: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Als Integralmittelwert von f bezeichnen wir

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

geometrisch



$$\underbrace{M_f \cdot (b-a)}_{\text{Fläche unter } M_f} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Fläche unter } f}$$

Satz 15.2: (MWS für Integrale)

Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\bar{x} \in [a,b]$ mit

$$f(\bar{x}) = M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: f stetig auf $[a,b]$ ... es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

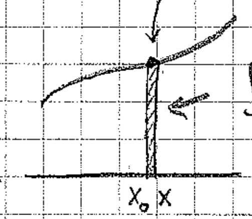
$$(b-a)\, f(x_{min}) = \int_a^b f(x_{min})\,dx \underset{(M)}{\le} \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x_{max})\,dx \le f(x_{max})(b-a)$$

d.h. $f(x_{min}) \le M_f \le f(x_{max})$ nach ZWS gibt es $\bar{x}$ zwischen x_{min}, x_{max}

mit $f(\bar{x}) = M_f$ $\blacksquare$

Im Fall kleiner Intervalle ... $x_0 \in [a,b]$ betrachte Intervall zwischen x_0 und $x \in [a,b]$

bei Stetigkeit $\approx f(x_0)$



$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \approx f(x_0)\cdot(x-x_0)$

$$\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{f(\bar{x})}_{\text{zw. } x_0 \text{ und } x} \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) \quad \text{wenn } f \text{ stetig}$$

damit ist $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ wie gewünscht (siehe Kap 14 Motivation Fall 2 !)

Stammfkt von f, wenn f stetig in $[a,b]$, denn

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right) = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

Satz 15.3: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

I) Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$.

Dann ist F Lip-stetig. Ist f stetig in $x_0 \in (a,b)$ dann ist $F'(x_0) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt \Big|_{x=x_0} = f(x_0)$

II) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Beweis: I) da $f \in \mathcal{R}(I)$ ist $|f| \leq B$

und $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \underset{D}{\leq} B\,|x - x_0|$

schon gesehen: wenn f stetig in Umgebung von x_0: $F'(x_0) = f(x_0)$

wenn f nur stetig im Punkt x_0: benutze

$$D(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{(x - x_0)\,f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\,dt$$

zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ falls $|t - x_0| < \delta$; wähle $|x - x_0| < \delta$

dann $|D(x)| \underset{D}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|}\, \varepsilon\, |x - x_0|$ also $D(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

II) Teleskopsummentrick aus Kapitel 14 Motivation Fall 1

$$g(b) - g(a) = S(g', t, \xi)$$

beliebige Zerlegung

mit MWS der Differentialrechnung

wähle $t_k^{(n)} = a + k\,\frac{b-a}{n}$ $\quad \xi^{(n)}$ zugeh. ξ-Vektor $\quad$ dann $\Delta(t^{(n)}) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dann (Satz 14.10) $\quad g(b) - g(a) = S(g', t^{(n)}, \xi^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b g'(t)\,dt$

Bedeutung: $\frac{d}{dx}$ und $\int_a^x$ sind im Wesentlichen inverse Operationen

$$\int_a^s \frac{d}{dx} g\, dx = g(s) - g(a), \qquad \frac{d}{dx} \int_a^x f(s)\,ds = f(x)$$

d.h. $\int_a^x \cdot\, dt$ ist "Stammfunktionsmaschine"

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ Stammfkt ? Hauptsatz. $\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt =: \mathrm{erf}(x)$ "Fehlerfunktion"

viele Funktionen sind so definiert

z.B. Γ-Funktion, ...

Differentiationsregeln werden zu <u>Integrationsregeln</u>

Satz 15.4: Seien $u, v: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a,b) und $u', v' \in \mathcal{R}(I)$. Dann

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{"partielle Integration"}$$

Beweis: wende HS II an auf $g = uv$ mit $g' = u'v + uv'$ ☒

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = ? \qquad \text{Sauber arbeiten} \qquad u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$$

$$= \left[x \cdot \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \pi \sin\pi - 0 \cdot \sin 0 - \int_0^\pi \frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx = -\left[-\cos x\right]_0^\pi = \cos\pi - \cos 0$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

$[f]_a^b$ ← Abkürzung für $f(b) - f(a)$

Satz 15.5: Sei $u : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ stetig, auf (a,b) differenzierbar und $u' \in \mathcal{R}([a,b])$

Sei $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(s)\, ds \qquad \text{"Substitutionsregel"}$$

Beweis: $F(s) := \int_\alpha^s f(t)\, dt$ SF zu f

Setze $g := F \circ u$ dann $g'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x)$

HS: $\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a) = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(s)\, ds = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$ $\square$

$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = ?$ sauber arbeiten: $u(x) = 1 - x^2$ $\quad [a,b] = [0,1]$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

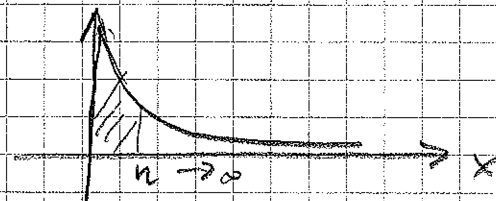
$u'(x) = -2x$ $\quad u(a) = 1,\ u(b) = 0$ $\quad = F'(x)$

$= -\frac{1}{2} \int_0^1 f(u(x))\, u'(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ mit $F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$

Hausaufgabe: viele Integrale üben, üben, üben

Uneigentliche und unbestimmte Integrale

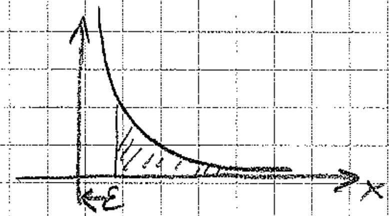
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - e^{-n}\right) = 1$$



unbeschr. Intervall $\rightsquigarrow$ "uneigentliches Integral"

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

unbeschr. Funktion "uneigentliches Integral"



bei mehreren Problemstellen üblicherweise <u>separate</u> Grenzwerte

$$\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx := \lim_{\varepsilon\uparrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \ln|x|\,dx + \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \ln|x|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{|x|}\right]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{x}\right]_\delta^1 = \infty$$

unbestimmte Integrale – ein Symbol für die Stammfunktionen

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ; HS : $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist <u>eine</u> SF

$[F] := \{ F + c \mid c \in \mathbb{R} \}$ ist die Menge <u>aller</u> SF zu f

Name : $\int f(x)\,dx := [F]$

unbestimmte Grenzen

$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ ist unsaubere aber nicht unübliche Schreibweise für

$\int x^2 dx = [\frac{1}{3} x^3]$

Vorteil dieser Schreibweise $\int_a^b x^2 dx = [\frac{1}{3} x^3]_a^b$