Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Übungen zur Analysis III

Algorithmus zur Bestimmung der Jordan-Normalform einer Matrix A

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben.

(1) bestimme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ mit
$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \ \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$

(2) setze $i := 1$

(3) setze $\mu := \lambda_i$ und ermittle $A_k = (A - \mu I)^k$, $B_k = A_{k-1}(\mathrm{Kern} A_k)$ für $k = 1, \ldots, K_\mu$, wobei $A_0 := I$ und K_μ definiert ist durch $B_{K_\mu} \neq \{0\}$ und $B_{K_\mu+1} = \{0\}$

(4) setze $N_{K_\mu+1}(\mu) = \{\ \}$ und ermittle $N_k(\mu)$ für $k = K_\mu, K_\mu - 1, \ldots, 1$, so dass
$N_k(\mu) \subset \mathrm{Kern} A_k$ und $A_{k-1}\left(\bigcup_{i=1}^{K_\mu - k} A_i\big(N_{k+i}(\mu)\big) \ \dot\cup \ N_k(\mu) \right)$ Basis von B_k

(5) solange $i < r$ setze $i \leftarrow i + 1$ und gehe zu **(3)**

(6) bilde aus jedem $0 \neq h \in N_k(\lambda_i)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ und jedes $k \in \{1, \ldots, K_{\lambda_i}\}$ die Sequenz $A_{k-1}h, A_{k-2}h, \ldots, A_1 h, h$

(7) Schreibe Sequenzen nebeneinander in Spalten einer Matrix U

dann gilt:
$U^{-1}AU$ ist in Jordanscher Normalform. Die λ_i heißen *Eigenwerte* von A, α_i deren *algebraische Vielfachheiten.* K_{λ_i} heißt *Index* von λ_i und $0 \neq h \in N_k(\lambda_i)$ heißt *Hauptvektor* k-ter Stufe zum Eigenwert λ_i von A.